

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

Копелиович А. И., Любченко Е. А.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Текст лекций
по курсу «Теоретическая физика»
для студентов всех специальностей и всех форм обучения

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 2 от 25.06.2015 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2016

УДК 530:531:536:537(075)
ББК 22.31
К65

Рецензенты:

В. К. Чаговец, д-р физ.-мат. наук, вед. н. с. ФТИНТ НАНУ;
С. С. Соколов, д-р физ.-мат. наук, зав. отд. ФТИНТ НАНУ

Текст лекцій з курсу «Теоретична фізика» містить теоретичний матеріал з розділів «Механіка», «Теорія електромагнітного поля», «Квантова механіка» та «Статистична фізика».

Призначено для студентів усіх спеціальностей фізико-технічного факультету та усіх форм навчання.

Копелиович А. И.

К65 Теоретическая физика : Текст лекций / А. И. Копелиович, Е. А. Любченко. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. – 200 с. – На рус. яз.

ISBN

Текст лекцій по курсу «Теоретическая физика» содержит теоретический материал по разделам «Механика», «Теория электромагнитного поля», «Квантовая механика» и «Статистическая физика».

Предназначено для студентов всех специальностей физико-технического факультета и всех форм обучения.

Ил. 31. Библиогр.: 8 назв.

УДК 530:531:536:537(075)
ББК 22.31

ISBN

© Копелиович А. И., Любченко Е. А., 2016

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие представляет собой текст лекций по теоретической физике, которые читается студентам физико-технического факультета Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Текст лекций «Теоретическая физика» включает в себя четыре раздела: «Механика», «Теория поля», «Квантовая механика» и «Статистическая физика». Для удобства читателей нумерация лекций и формул осуществлена в пределах каждого из четырех разделов. При необходимости ссылка на лекцию или формулу другого раздела сопровождается соответствующей аббревиатурой (М, ТП, КМ и СФ).

Материал лекций основывается на классическом 10-томном курсе теоретической физики академиков Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1] для студентов, специализирующихся в области теоретической физики. Этот курс предполагает высокий уровень математической подготовки читателя, его хорошее абстрактное мышление и значительное количество аудиторных часов, выделяемых учебной программой на изучение курса. Данный конспект лекций предлагается для студентов специальностей, связанных с прикладной физикой. В связи с этим для облегчения понимания в нем содержится необходимые разъяснения применяемых математических операций, большое внимание уделено деталям вывода всех результатов, а также приведено множество примеров, позволяющих легче воспринять излагаемый материал. Для проверки усвоения материала в конце пособия предлагаются контрольные вопросы.

Пособие предназначено, в первую очередь для студентов физико-технического факультета НТУ «ХПИ», но может быть полезно для студентов всех специальностей высших технических учебных заведений и широкого круга читателей, изучающих теоретическую физику самостоятельно.

I. МЕХАНИКА

Лекция 1. Принцип наименьшего действия

1.1. Законы Ньютона. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Движение тел описывается законами, сформулированными великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643–1727). *Первый закон Ньютона* определяет ту систему отсчета, в которой он справедлив, т. е. инерциальную систему, которую проще всего связать с телом, находящимся очень далеко от других тел и поэтому с ними не взаимодействующим.

Второй закон имеет следующий векторный вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Третий закон Ньютона говорит, что тела взаимодействуют с силами равными по модулю и противоположными по направлению, а, следовательно, различными по знаку. Зная начальные условия и решая эти уравнения, а их столько, сколько взаимодействующих тел в системе, мы получаем уравнения движения тел.

Допустим, тело жестко прикреплено к направляющей, которая имеет произвольную форму, и на него действует некоторое поле. Как применить второй закон? Нужно в каждой точке раскладывать действующую силу на составляющие вдоль и поперек направляющей и учитывать, что направляющие оси непрерывно меняются. Это не только сложный, но и неудачный метод. И неудачен он тем, что не учитывает внутренней простоты задачи, а, именно того, что здесь имеется только одна переменная – длина пути вдоль направляющей (и скорость движения вдоль нее). Поэтому в теоретической физике имеют дело не с конкретными декартовыми координатами, в которых записываются уравнения Ньютона, а с обобщенными, в качестве которых могут выступать любые переменные, определяющие положения тел.

Любые s величин q_1, q_2, \dots, q_s , полностью характеризующие положение системы с s степенями свободы, называют ее *обобщенными координатами*, а их производные по времени – *обобщенными скоростями*.

Таким образом, речь идет о достижении большей общности описания. А это, в свою очередь, приводит к более общему взгляду на механику в целом, что дает возможность перекинуть мостик от механики к оптике, к квантовой механике, что будет показано в следующих главах курса теоретической физики.

1.2. Принцип Ферма. Принцип наименьшего действия. Функция и уравнения Лагранжа

Зададимся вопросом, какие пути выбирает природа для движения тел из многих возможных. Предположим, что тело вышло из некоторой точки и пришло в некоторую другую. Можно предположить, что двигалось оно по сколь угодно сложной кривой. Но природа в отсутствие действия сил выбирает прямую, т. е. из всех кривых ту, длина которой минимальна, поскольку прямая – это кратчайшее расстояние между двумя точками. В 1662 году французский математик Пьер Ферма (1601–1665) сформулировал принцип наименьшего времени, впоследствии названный в его честь. Согласно *принципу Ферма*, световой луч движется по прямой, а если среда оптически неоднородна, то луч между двумя точками движется так, чтобы минимальным было время его движения. Например, луч света (рис. 1.1) движется между двумя точками 1 и 2 не по кратчайшему пути, а по пути, обеспечивающему минимальное время прохождения $t = \frac{S_{1A}}{c} + \frac{S_{A2}}{c} \cdot n$, где n – показатель преломления среды, а c – скорость света.

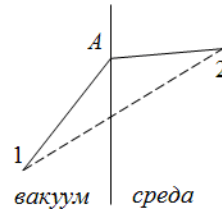


Рисунок 1.1

Таким образом, в природе заложен принцип минимальности некоторой величины при выборе пути движения. Ирландский ученый Уильям Гамильтон (1805–1865), анализируя аналогии между механикой и оптикой, понял, что такой величиной, которая должна быть минимальной для реальных траекторий, является действие.

Действие – это фундаментальная физическая величина, являющаяся интегральной характеристикой (функционалом) процесса (реального или воображаемого), происходящего с физической системой.

Процесс – это путь перехода системы между фиксированными начальным и конечным ее состояниями.

Действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (1.1)$$

где L – функция координат q , скоростей \dot{q} и времени t (для упрощения записи написана одна координата и одна скорость). Функция L называется *функцией Лагранжа* данной системы и названа в честь французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа (1736 – 1813).

Принцип наименьшего действия (или *принцип Гамильтона*): между заданной начальной координатой (или набором координат) $q(t_1)$, в которой система находилась в начальный момент времени, и заданной конечной координатой $q(t_2)$ система движется так, чтобы интеграл действия (1.1) имел наименьшее возможное значение. Иными словами, из всех мыслимых зависимостей координаты от времени $q(t)$ в функции

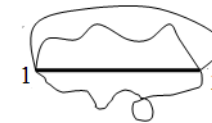


Рисунок 1.2

Лагранжа (при фиксированных начальной и конечной точках) должна быть выбрана такая, при которой действие имеет наименьшее значение (рис. 1.2.). Таким образом, найдя минимум действия, мы определим зависимость $q(t)$, т. е. уравнение движения.

Заметим, что конкретный вид функции Лагранжа пока не установлен, а построена лишь самая общая конструкция, которая пока не уточняет, с какими конкретно системами мы работаем.

Для того, чтобы найти функцию $q(t)$, осуществляющую минимум действия, вспомним, как математически находят минимум функции, а именно, рассматривают малые приращения.

Придадим функции $q(t)$ малое приращение, т. е. возьмем функцию такого вида

$$q(t) + \delta q(t),$$

где $\delta q(t)$ – малое приращение либо *вариация функции* $q(t)$. Поскольку концы фиксированы,

$$q(t_1) = q(t_2) = 0.$$

Найдем изменение действия при вариации функции $q(t)$. Действуем как при вычислении дифференциала функции двух переменных, а со значком δ обращаемся как со значком дифференциала d , поскольку δ по сути и есть малое приращение.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt.$$

Преобразуем второе слагаемое, интегрируя по частям:

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt. \quad (1.2)$$

Внеинтегральный член равен нулю из-за фиксированности концов.

Если $q(t)$ – это истинное уравнение движения, то S имеет здесь минимум, а в точке экстремума S его малое приращение, как следует из курса математического анализа, равно нулю: $\delta S = 0$. Поскольку это равенство должно быть справедливо при любой функции $\delta q(t)$, то нулю должно быть равно выражение в квадратных скобках. Интеграл от произведения некоторой функции на произвольную функцию равен нулю только тогда, когда первая равна нулю при всех значениях переменной:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Все вышеуказанные действия проделаны для простоты для случая одной координаты, а результат (1.3) обобщен для многих координат.

Дифференциальные уравнения (1.3), из которых следуют уравнения движения, называются *уравнениями Лагранжа*. При этом, функцию Лагранжа L нами еще не определена, поэтому пока неизвестно, что следует из выражения (1.3).

Авторы [1] в своем курсе выводят функцию Лагранжа из некоторых общих соображений, которые далеко не всегда понятны читателю. Мы же напишем функцию Лагранжа и проверим, следуют ли из нее ранее известные закономерности.

Функция Лагранжа системы материальных точек:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots), \quad L = T - U, \quad (1.4)$$

где индекс a нумерует материальные точки; \vec{r}_a – радиус-вектор a -ой точки; $\vec{v}_a \equiv \dot{\vec{r}}_a$ – ее скорость; U – потенциальная энергия системы.

Величина T в (1.4) – кинетическая энергия. Это выражение отличается от полной энергии знаком минус перед потенциальной энергией. Для проверки подставим (1.4) в (1.3) и получим уравнения Ньютона

$$\frac{m_a dv_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a},$$

где $-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}$.

Последняя формула знакома из курса общей физики, что подтверждает правильность всего построения.

ЛЕКЦИЯ 2. Законы сохранения. Энергия, импульс, момент импульса

В курсе общей физики законы сохранения различных величин возникали как следствия законов Ньютона. В теоретической физике законы сохранения играют более глубокую роль и являются следствием фундаментальных симметрий пространства и времени.

2.1. Энергия. Закон сохранения энергии

Сохранение энергии является следствием однородности времени. Иными словами, законы движения одинаковы во все моменты времени. Математическое отражение этого факта – функция Лагранжа замкнутой (не взаимодействующей с внешними телами) системы не зависит от времени явно.

Через зависимость координат и скоростей функция Лагранжа, конечно, зависит от времени, но это – неявная зависимость, поскольку время в ней не фигурирует. Посмотрим, что из этого факта следует.

Запишем полную производную функции Лагранжа по времени как полную производную функции нескольких переменных

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{\dot{q}}_i \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Последнее слагаемое перечеркнуто вследствие отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени. Заменяя в (2.1) $\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$ согласно уравнению Лагранжа (1.2), получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i \right] = \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right].$$

Проверим в обратную сторону как производную произведения. Отсюда, перенося в одну сторону и вынося производную за знак суммы

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - L \right] = 0.$$

Величина в скобках не зависит от времени, т. е. сохраняется, ее и называют *энергией*.

Запишем

$$E = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - L = \text{const}. \quad (2.2)$$

Для придания большей конкретности этому выражению подставим в (2.2) выражение (1.4) для L и получим

$$E = T + U = \sum_a \frac{m v_a^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots). \quad (2.3)$$

Мы получили известную формулу для полной механической энергии, записанную в декартовых координатах (индекс a нумерует материальные точки). Отметим, что в наших вычислениях мы использовали только то, что функция Лагранжа не зависит от времени явно. Но это выполняется не только для замкнутой системы, но и для системы, нахо-

дящейся в постоянном внешнем поле, для которой потенциальная энергия также не зависит от времени.

Таким образом, *энергия сохраняется для замкнутых систем и систем, находящихся в постоянном внешнем поле (поскольку в обоих случаях функция Лагранжа не зависит от времени явно)*.

2.2. Импульс. Обобщенный импульс и обобщенная сила. Закон сохранения импульса

Сохранение импульса является следствием однородности пространства. Иными словами, законы движения одинаковы во всех точках пространства. Математическим отражением этого факта является то, что функция Лагранжа замкнутой системы не меняется при параллельном переносе системы как целого в пространстве.

Это связано с тем, что потенциальная энергия зависит только от *разности* координат взаимодействующих частиц, а не от самой координаты, поэтому потенциальная энергия не изменяется, если систему сместить как целое.

Параллельный перенос – это следующее преобразование радиус-векторов всех частиц системы: $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_a + \vec{\varepsilon}$.

Проследим изменение функции L вследствие бесконечно малого переноса, т. е. при $\vec{\varepsilon} \rightarrow 0$

$$dL = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \right) d\vec{r}_a = \vec{\varepsilon} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \right).$$

Поскольку L не должно измениться, $dL = 0$. Следовательно, $\sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \right) = 0$ и, воспользовавшись для производной от L уравнением Лагранжа (1.3), получим в декартовых координатах

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right) = 0.$$

Из этого уравнения и с учетом (1.4) следует, что сохраняющейся величиной для замкнутой системы является *импульс*

$$\vec{P} = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right) = \sum_a m \vec{v}_a. \quad (2.4)$$

$\vec{p}_a = m\vec{v}_a$ – импульс отдельной частицы,

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a$$

Если мы пользуемся обобщенными координатами, то величина

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.5)$$

называется *обобщенным импульсом*, а величина

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.6)$$

называется *обобщенной силой*.

Из уравнения Лагранжа (1.3) следует *обобщенное уравнение Ньютона*

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (2.7)$$

2.3. Центр инерции

Центром инерции системы называют точку, радиус-вектор которой

$$\vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}. \quad (2.8)$$

Найдем скорость движения центра инерции дифференцированием по времени \vec{R}

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a} = \frac{\vec{P}}{\sum_a m_a},$$

откуда

$$\vec{P} = \vec{R} \sum_a m_a.$$

Это означает, при рассмотрении движения системы как целого ее можно заменить материальной точкой, расположенной в центре инерции, и обладающей суммарной массой частиц системы.

2.4. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Сохранение момента импульса является следствием изотропии пространства. Иными словами, законы движения не меняются при повороте системы как целого. Математическим отражением этого факта является то, что функция Лагранжа замкнутой системы не меняется при повороте системы как целого.

Произведем преобразования L при бесконечно малом повороте системы на угол $d\vec{\varphi}$. Радиус-вектор каждой ее точки получает приращение $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$ (вектор поворота $d\vec{\varphi}$ равен по модулю углу поворота $d\varphi$ и направлен вдоль оси поворота в сторону, отвечающую правилу правого винта).

Изменение L при повороте

$$dL = \sum_a \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \right) d\vec{r}_a + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right) d\vec{v}_a \right] = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \vec{p}_a$ и из (1.3) $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \dot{\vec{p}}_a$, то

$$dL = \sum_a \left(\dot{\vec{p}}_a [d\vec{\varphi}, \vec{r}_a] + \vec{p}_a [d\vec{\varphi}, \vec{v}_a] \right) = 0.$$

Производя циклическую перестановку множителей и вынося $d\vec{\varphi}$ за знак суммы, получаем

$$d\vec{\varphi} \sum_a \left([\vec{r}_a, \dot{\vec{p}}_a] + [\vec{v}_a, \vec{p}_a] \right) = d\vec{\varphi} \left(\frac{d}{dt} \right) \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0.$$

Момент импульса

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a]. \quad (2.9)$$

Таким образом, для замкнутой системы $\vec{M} = const$. Это же справедливо для системы во внешнем поле, потенциал которого зависит только от расстояния от некоторой точки, $U = U(r)$, (так называемое *центрально поле*). Стоит заметить, что любая симметрия, т. е. независимость функции Лагранжа от какой-либо переменной, ведет к появлению соответствующего закона сохранения.

ЛЕКЦИЯ 3. Некоторые примеры интегрирования уравнений движения

3.1. Одномерное движение. Финитное и инфинитное движения

Одномерным называют движение системы с одной степенью свободы. В случае одной степени свободы функция Лагранжа в декартовых координатах имеет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x).$$

Энергия (сохраняющаяся величина) согласно (2.3)

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = \left\{ \left(\frac{2}{m} \right) [E - U(x)] \right\}^{1/2}.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируем разделением переменных и получаем

$$t = \left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} \int \frac{dx}{[E - U(x)]^{1/2}} + \text{const}. \quad (3.1)$$

Поскольку кинетическая энергия – величина существенно положительная, то условие $U(x) < E$ определяет области возможного движения тела. Если область движения ограничена, движение называют *финитным*, если не ограничена – *инфинитным*. На рис. 1.3. показаны случаи финитного (а) и инфинитного (б, в) движений.

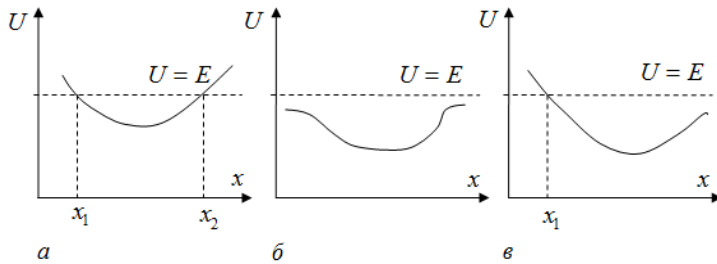


Рисунок 1.3

Точки, в которых $U(x) = E$, определяют границы движения и называются *точками остановки* (точки x_1 и x_2 на рис. 1.3).

Период колебаний при финитном одномерном движении

$$T(E) = (2m)^{1/2} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{[E - U(x)]^{1/2}},$$

где x_1 и x_2 – точки остановки.

3.2. Задача двух тел

Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит только от расстояния между ними, поэтому функция Лагранжа для системы двух взаимодействующих частиц равна:

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Введем вектор расстояния между точками $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и поместим начало координат в центре инерции, т. е. координату центра тяжести (2.8) приравняем нулю $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$, откуда

$$\vec{r}_1 = \left[\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \right] \vec{r},$$

$$\vec{r}_2 = - \left[\frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \right] \vec{r}.$$

Для функции Лагранжа получаем

$$L = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r),$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$ – приведенная масса двух частиц.

Таким образом, мы свели задачу двух частиц (6 степеней свободы) к задаче одной частицы (3 степени свободы) в поле, зависящем только от расстояния до некоторой неподвижной точки, т. е. центральном поле.

3.3. Движение в центральном поле

Как было показано в лекции 2, в центральном поле сохраняющимися величинами являются энергия (2.3) и момент импульса (2.9). Поскольку векторы \vec{M} и \vec{r} взаимно перпендикулярны, движение частицы происходит в одной плоскости, перпендикулярной \vec{M} . Введя в этой плоскости полярные координаты, запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = \left(\frac{m}{2}\right)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Проекция вектора \vec{M} на нормаль к плоскости, в которой происходит движение, в полярных координатах есть

$$M_z \equiv M = mrv_t = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \quad (3.2)$$

где v_t – составляющая скорости, перпендикулярная радиусу-вектору частицы. Записывая энергию частицы (2.3) в полярных координатах и подставляя выражение для $\dot{\varphi}$ из (3.2), получаем

$$t = \int \frac{dr}{\left\{ \left(\frac{2}{m}\right)[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2} \right\}^{1/2}} + \text{const}. \quad (3.3)$$

Таким образом, аналогично (3.1) имеем связь между t и r . Написав (3.2) в виде

$$d\varphi = \frac{Mdt}{mr^2},$$

подставляя сюда dt из (3.3), находим

$$\varphi = \int \frac{\left(\frac{M}{r^2}\right)dr}{\left\{ 2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2} \right\}^{1/2}} + \text{const}. \quad (3.3)$$

Формулы (3.3) и (3.4) полностью решают задачу в общем виде.

3.4. Движение твердого тела

В механике под *твердым телом* понимают систему материальных точек, расстояния между которыми неизменны.

Введем две системы координат: лабораторную, в которой будем рассматривать движение (координаты точек в ней обозначим \vec{r}'), и жестко связанную с телом, начало отсчета которой поместим в его центр тяжести (координаты – \vec{r}). Тогда бесконечно малое смещение, очевидно, можно записать как (см. формулу для малого поворота в лекции 2)

$$d\vec{r}' = d\vec{R} + [d\vec{\varphi}, \vec{r}],$$

где \vec{R} – координата центра тяжести тела в лабораторной системе; $d\vec{\varphi}$ – угол поворота тела. Отсюда для скорости \vec{v} точек тела в лабораторной системе получаем

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}], \quad (3.5)$$

где $v = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – вектор угловой скорости вращения тела.

Подставляем (3.5) в выражение (1.4) для функции Лагранжа

$$L = T - U,$$

$$T = \sum \left(\frac{m}{2}\right) \left(\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}]\right)^2 = \sum \left(\frac{m}{2}\right) V^2 + \sum m \vec{V} [\vec{\Omega}, \vec{r}] + \sum \left(\frac{m}{2}\right) [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2.$$

Нумерующий точки тела индекс для простоты записи опускаем. $\vec{\Omega}$ и \vec{V} , одинаковые для всех точек тела, выносим за знак суммы. Также учтем, что $\sum m\vec{r} = 0$, поскольку начало отсчета связанной с телом системы выбрано в центре инерции (радиус-вектор (2.8) центра инерции в этой системе равен нулю). В результате получим

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \sum m \left\{ \Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}, \vec{r})^2 \right\} = T_{\text{поступ}} + T_{\text{вращ}}. \quad (3.6)$$

В выражении для вращательной энергии мы фактически использовали формулу $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Векторное произведение в предыдущей

формуле – произведение величин на $\sin \alpha$, а скалярное произведение – на $\cos \alpha$; суммарную массу мы обозначили буквой μ . Далее мы будем пользоваться латинскими буквами в индексах для обозначения компонент векторов.

$$T_{\text{вращ}} = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_i \sum_k m \left(\Omega_i^2 r_k^2 - \Omega_i r_i \Omega_k r_k \right) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{ik} \Omega_i \Omega_k \sum m \left(\sum_1 r_1^2 \delta_{ik} - r_i r_k \right).$$

Последнее равенство легко проверить, зная, что символ Кронекера $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$.

Окончательно для функции Лагранжа имеем

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{ik} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U, \quad (3.7)$$

где величина

$$I_{ik} = \sum m \left(\sum_1 r_1^2 \delta_{ik} - r_i r_k \right) \quad (3.8)$$

называется *тензором моментов инерции тела* или просто *тензором инерции*.

Если тело можно рассматривать как сплошное, то сумма по частицам заменяется интегралом по объему тела

$$I_{ik} = \int \rho \left(\sum_1 r_1^2 \delta_{ik} - r_i r_k \right) dV, \quad (3.9)$$

где ρ – плотность.

Выбирая в качестве обобщенных координат \vec{R} и $\vec{\varphi}$ (6 степеней свободы) получим из уравнений Лагранжа (1.3) уравнения движения твердого тела:

$$\mu \dot{\vec{V}} = \vec{F}, \quad \dot{\vec{M}} = \vec{K}, \quad (3.10)$$

$$\text{где } \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}}, \quad M_i = \sum_k I_{ik} \Omega_k, \quad \vec{K} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}}.$$

При дифференцировании L по Ω_i одна сумма пропадает, т. к. i – конкретная координата; кроме того, $\frac{1}{2}$ пропадает, поскольку выражение квадратично по Ω .

Здесь \vec{F} – суммарная сила, действующая на тело, \vec{K} – момент сил, действующих на тело. Вектор \vec{M} – это момент импульса тела, в чем можно убедиться, подставляя в определение момента импульса (2.9) выражение (3.5) для скорости:

$$M_i = \sum \sum_k m \left\{ \sum_1 r_1^2 \Omega_i - r_i r_k \Omega_k \right\}. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.10) полностью определяют как поступательное, так и вращательное движение тела. Нетрудно понять, что это обобщенное уравнение Ньютона (2.7) относительно переменных \vec{R} и $\vec{\varphi}$, соответственно.

ЛЕКЦИЯ 4. Гамильтонов формализм

4.1. Функция и уравнения Гамильтона

Ранее мы познакомились с мощным и элегантным способом построения механики, базирующимся на принципе наименьшего действия Гамильтона, в котором используется функция Лагранжа, которая является функцией координат и скоростей материальных точек. Но координаты и скорости – это не единственный способ задания состояния механической системы. Вместо скорости \vec{v} можно использовать импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}$. Этот способ описания является более часто применяемым в теоретической физике, поскольку он более удобен для анализа общих вопросов механики и квантовой механики и предоставляет больше возможностей для решения задач.

Если независимыми переменными считать координаты и импульс, то вместо функции Лагранжа удобно пользоваться другой функцией – уже известной нам энергией.

Энергия системы, записанная как функция обобщенных координат и импульсов, называется *функцией Гамильтона* (обозначается буквой H). Гамильтонов формализм в механике – это описание с помощью координат и импульсов в качестве независимых переменных.

Для понимания удобства использования понятия энергия запишем полный дифференциал энергии (для упрощения записи в выводах не будем писать суммы по многим переменным, а напишем лишь в конечных формулах).

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} - L\right) = d(p\dot{q} - L) = \dot{q}dp + p d\dot{q} - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)dq - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)d\dot{q} = \\ &= \dot{q}dp + p d\dot{q} - \dot{p}dq - p d\dot{q} = \dot{q}dp - \dot{p}dq. \end{aligned}$$

При последнем преобразовании мы использовали уравнение Лагранжа (1.3) и определение импульса (2.5). Отсюда для частных производных следует

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.1)$$

Это и есть уравнения движения, называемые *уравнениями Гамильтона* или *канонические уравнения*. Их вдвое больше, чем уравнений Лагранжа (1.3) ($2s$ вместо s), но уравнения Гамильтона – дифференциальные уравнения первого порядка, а уравнения Лагранжа – второго порядка.

В декартовых координатах функция Гамильтона для системы материальных точек с учетом (2.3) и $\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$ имеет вид

$$H = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + U. \quad (4.2)$$

Из (4.1) и (4.2) видно, что первое уравнение (4.1) – это просто определение скорости $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$, а второе – 2-й закон Ньютона.

4.2. Действие как функция координат и времени. Уравнение Гамильтона-Якоби

Рассмотрим еще одну схему построения механики, которая полезна как для оптики, так и для квантовой механики. Будем считать, что действие (1.1) является функцией конечного момента времени t_2 и конечной координаты q_2 , а в качестве путей перемещения мы будем использовать

только истинные пути. Ранее в лекции 1 мы рассматривали всевозможные пути, а, минимизируя действие, находили истинные. Теперь считаем, что пути истинные, т. е. зависимость координат от времени известна, ее и подставляем в интеграл (1.1).

Вычислим полный дифференциал такой функции. Начнем с вычисления дифференциала действия, считая, что конечный момент времени t_2 фиксирован, а меняется только конечная координата q_2 . Из первой лекции для вариации действия имеем

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) - \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right] \delta q dt.$$

Поскольку конечный момент считаем фиксированным, то не нужно добавлять часть, связанную с изменением верхнего предела интеграла. Но поскольку траектории действительного движения удовлетворяют уравнениям Лагранжа (1.3), то стоящий здесь интеграл равен нулю. В первом же члене полагаем на нижнем пределе $\delta q(t_1) = 0$, а значение $\delta q(t_2)$ обозначим просто как δq . С учетом того, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$, получим

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (4.3)$$

Здесь мы от одной обобщенной координаты перешли к случаю наличия многих.

Чтобы найти изменение S при бесконечно малом изменении конечного момента t_2 , используем следующий искусственный прием. По определению действия (1.1) его полная производная по времени равна

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (4.4)$$

С другой стороны, рассматривая S как функцию координат и времени в указанном выше смысле и используя формулу (4.3), имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

При сравнении этой формулы с (4.4), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

и, окончательно, учитывая определение энергии (2.2),

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (4.5)$$

Таким образом, полный дифференциал действия при изменении координат и времени, как следует из (4.5), имеет вид

$$dS = -Hdt + \sum_i p_i dq_i. \quad (4.6)$$

Поскольку энергия, выраженная через координаты и импульсы, называется *функцией Гамильтона* $H(q, p, t)$, уравнение (4.6) можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0. \quad (4.7)$$

Это уравнение в частных производных первого порядка называется *уравнением Гамильтона-Якоби*. Оно наряду с уравнениями Лагранжа (1.3) и каноническими уравнениями (4.1) также описывает движение механических систем.

II. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ЛЕКЦИЯ 1. Принцип относительности. Инварианты. Интервал. Преобразования Лоренца

1.1. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна

Данная часть курса посвящена рассмотрению электромагнитных явлений и электромагнитного поля с точки зрения теоретической физики.

Первые экспериментальные исследования электромагнитных явлений были предприняты М. Фарадеем (1792–1867), а теоретические – Дж. К. Максвеллом (1831–1879). В 1905 г. А. Эйнштейн (1879–1955) в работе «К электродинамике движущихся тел» предложил свое понимание свойств пространства и времени. Используя эти представления, мы постараемся получить как следствие те результаты, которые экспериментально и теоретически предшествовали работам Эйнштейна.

Мы с вами говорили уже о некоторых симметриях пространства и времени: однородности, изотропии, из них следовали законы сохранения. В обычной механике была известна еще одна симметрия – независимость от выбора инерциальной системы отсчета и выполнялся *принцип относительности Галилея*: во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики.

Принцип относительности Эйнштейна – это фундаментальный физический принцип, согласно которому все физические процессы в инерциальных системах отсчета протекают одинаково. В своих постулатах Эйнштейн объединил расширенный принцип относительности с утверждением о постоянстве скорости света во всех системах отсчета, экспериментальное подтверждение которого получено в 1887 году в опытах Майкельсона-Морли.

1.2. Инварианты. Интервал

Казалось бы, две составляющие принципа Эйнштейна категорически противоречат друг другу. Действительно, пусть источник света движется

относительно наблюдателя. Свет, уходящий от источника, движется со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, измеренной в системе отсчета, связанной с источником. Если физические законы одинаковы во всех системах отсчета, то в системе отсчета, связанной с наблюдателем, скорость света должна быть большей или меньшей, чем c . Эйнштейн предложил разрешение этого противоречия, которое казалось невероятным: просто время в движущейся относительно наблюдателя системе течет не так, как в покоящейся (рис. 2.1). То есть время не абсолютно, что считалось само собой разумеющимся в старой, классической механике. Величина промежутка времени между двумя событиями зависит от того, в какой из инерциальных систем отсчета его измеряют. То же самое относится и к пространственным интервалам. В результате время и пространство становятся относительными. Поэтому теорию, которая это рассматривает, называют *теорией относительности* или *релятивистской теорией*. Ясно, что при таком новом взгляде на пространство и время всю механику, начиная с кинематики, нужно строить иначе.

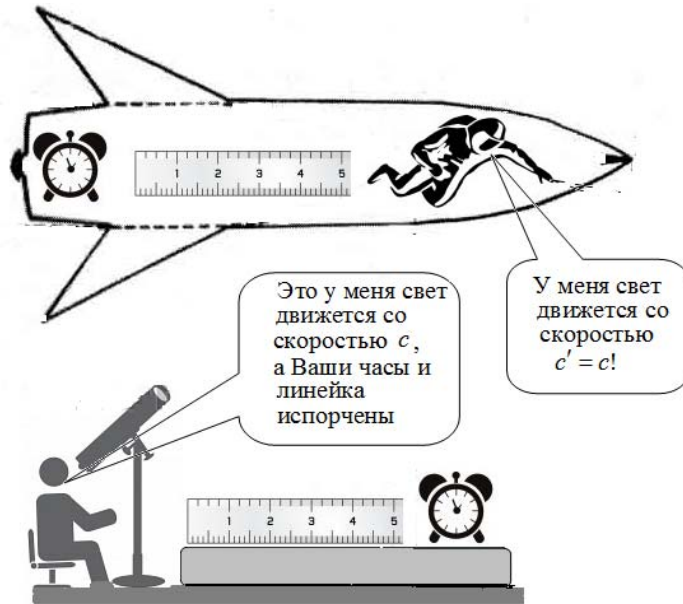


Рисунок 2.1

Это строительство мы будем начинать не с того, с чего это делал сам Эйнштейн (он рассматривал мысленные эксперименты по измерению скорости света), а сразу с более общих позиций, которые предложены последователем Эйнштейна, его же учителем математики, Германом Минковским (1864–1909). Для того, чтобы разобраться с относительными величинами, лучше найти сначала новые абсолютные величины, не меняющиеся при переходе от одной инерциальной системы к другой, т. е. *инвариантные* относительно этого преобразования величины.

В классической физике инварианты относительно перехода от одной инерциальной системы к другой

$$|\Delta \vec{r}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Предположение об инварианте относительно этого перехода в релятивистской механике (пусть для простоты $\Delta y = \Delta z = 0$):

$$(x_2 - x_1)^2 + a(t_2 - t_1)^2.$$

Здесь не сохраняются отдельно ни пространственный, ни временной интервалы, а интересующее нас преобразование перепутывает координаты и время. Поэтому, если мы хотим написать величину типа квадрата вектора, то написать ее естественно именно таким образом.

Чтобы определить коэффициент a , используем постоянство скорости света во всех системах. Пусть события, происходящие в момент времени t_1 в точке x_1 и в момент t_2 в точке x_2 связаны световым лучом, т. е. событие 1 – излучен свет, событие 2 – луч света зарегистрирован. Следовательно, $x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$. Координату и время этих событий в другой инерциальной системе отсчета запишем со штрихом, поскольку скорость света постоянна $x'_2 - x'_1 = c(t'_2 - t'_1)$. Из требования инвариантности получаем

$$(a + c^2)(\Delta t^2 - \Delta t'^2) = 0,$$

откуда $a = -c^2$ для того, чтобы выполнялось при различии интервалов времени.

Таким образом, мы обосновали, что инвариантом для двух событий в релятивистской механике является интервал s_{12} :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2. \quad (1.1)$$

Введем вместо времени координату $\tau = ict$ (i – мнимая единица). Тогда

$$s^2 = -(\Delta r^2 + \Delta \tau^2). \quad (1.2)$$

Из инвариантности интервала можно вывести практически всю релятивистскую механику.

Начнем с самого фундаментального следствия. Выражение (1.2) имеет вид квадрата длины вектора (с минусом) и этот вектор имеет четыре компоненты: три – пространственные и одну – временную. Таким образом, в теории относительности пространство и время неразрывно связаны: пространственные координаты и время являются компонентами четырехмерного вектора.

Рассмотрим вопрос, всегда ли можно найти такую систему отсчета, в которой два заданных события происходят в одном месте, т. е. при одинаковых координатах. В классической физике это возможно, поскольку всегда имеется система, которая за время между этими событиями проходит расстояние между ними, таким образом, они оказываются в одной точке.

Теория относительности дает другой ответ на этот вопрос. Пусть расстояние между событиями 1 и 2 в системе отсчета K равно l_{12} , а время между ними t_{12} . Тогда интервал между событиями в системе K $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$. Существует ли система отсчета K' , в которой расстояние $l'_{12} = 0$? Поскольку интервалы в этих системах должны быть одинаковы,

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12}.$$

А так как правая часть неизбежно положительна, то и левая должна быть больше 0, т. е. система K' существует, если квадрат интервала положителен.

Следовательно, можно найти такую систему отсчета, в которой два события происходят в одной точке пространства, если интервал между ними есть действительная величина. Скорость такой системы относи-

тельно системы наблюдателя l_{12}/t_{12} . Отсюда следует, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Вещественные интервалы называют *временеподобными*, поскольку есть система отсчета, в которой такой интервал сводится к чистому времени.

Поставим и следующий вопрос. Можно ли найти такую систему отсчета K' , в которой два события будут происходить в один момент времени, если в системе K они не одновременны? Для классической физики это вопрос бессмысленный, поскольку одновременность она во всех системах одновременность. А в теории относительности из инвариантности интервала следует

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l'^2_{12}.$$

Таким образом, два события происходят одновременно в некоторой системе отсчета, если интервал между ними мнимая величина. Мнимые интервалы называют *пространственноподобными*.

Если интервал между событиями пространственноподобный, то их чередование по времени может быть изменено переходом в другую систему отсчета. Если интервал времениподобный, то одно событие по отношению к другому абсолютно в будущем, значит, одно событие может быть следствием другого.

События, интервал между которыми $s_{12} = 0$, лежат на одном световом луче, т. е. событием 1 может быть испускание луча, а событием 2 – его прием.

Собственным временем объекта называют время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с этим объектом (в системе K'). Если в лабораторной системе K эти часы прошли расстояние dl за время dt , то из инвариантности интервала получаем:

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dl^2}{dt^2 c^2}}$$

или

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.3)$$

где v – скорость объекта относительно системы наблюдателя. Иными словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

1.3. Преобразование Лоренца

Выразим четырехмерные координаты события в инерциальной системе отсчета K через координаты его в другой инерциальной системе K' (рис. 2.2), что представляет собой наиболее полное решение задачи релятивистской кинематики.

Найдем в четырехмерном пространстве-времени такое преобразование системы координат, которое в нем оставляет неизменным интервал между двумя событиями – аналог расстояния между точками в трехмерном пространстве. Такое преобразование – это поворот системы координат (параллельный перенос системы мы рассматривать не будем). Пусть поворот на угол φ происходит только в плоскости x, τ ($y = y', z = z'$).

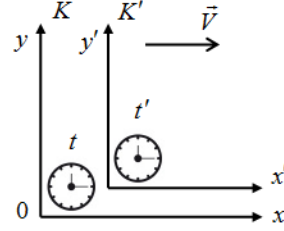


Рисунок 2.2

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - \tau' \sin \varphi, \\ \tau &= x' \sin \varphi + \tau' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Это известные формулы для поворота системы координат на плоскости.

Рассмотрим движение начала координат системы K' , т. е. точки $x' = 0$. Из написанных выше равенств следует

$$\operatorname{tg} \varphi = -x/\tau = -x/ict = iV/c,$$

где V – скорость системы K' относительно K . Угол поворота получается мнимым. Выражая $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$ согласно известным формулам тригонометрии, получаем преобразование Лоренца

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \end{cases} \quad (1.4)$$

При $c \rightarrow \infty$ преобразования Лоренца переходят в классические преобразования Галилея

$$\begin{cases} x = x' + Vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases} \quad (1.5)$$

Первая из формул (1.5) означает, что начало отсчета системы K' смещается со временем.

Полученные преобразования (1.4) были найдены нидерландским физиком, лауреатом Нобелевской премии 1902 года Хендриком Лоренцем (1853–1928) в 1904 году как преобразования, не меняющие вид уравнений Максвелла. Но Лоренц не придавал величинам x' и t' смысл истинных координат и времени.

Собственной длиной стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится.

Пусть стержень покоится в системе K . Тогда из (1.4) для координат его концов в системе K имеем:

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (1.6)$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (1.7)$$

Вычитая уравнение (1.7) из (1.6) и учитывая, что при измерении длины в системе K' обе координаты должны быть измерены в одно и то же время t' , получаем

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}, \quad (1.8)$$

т. е. собственная длина l_0 стержня больше его длины l , измеренной в любой другой системе отсчета, движущейся относительно стержня.

1.4. Преобразование скорости

Пусть частица движется со скоростью v' относительно системы K' , т. е. $x' = v't'$. Подставив это выражение в (1.4) и разделив x на t , найдем скорость v частицы в системе K

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) определяет преобразование скорости при переходе от одной системы отсчета к другой. В классическом пределе при $c \rightarrow \infty$ $v = v' + V$.

Следует отметить, что раздел релятивистской кинематики отнесен не к разделу «Механика», а к разделу «Теории поля», поскольку движение тел оказывается непосредственно связанным со светом. И в этом единство и мира, и теоретической физики.

ЛЕКЦИЯ 2. Релятивистская механика

2.1. Математическое введение. Четырехмерные векторы

Координаты события (x, y, z, τ) можно рассматривать как координаты четырехмерного радиуса-вектора

$$\vec{r}(x, y, z, ict) \equiv \vec{r}(\vec{r}, ict) \equiv \vec{r}(x_1, x_2, x_3, x_4). \quad (2.1)$$

Это равноправные способы записи.

Компоненты A_i любого четырехмерного вектора \vec{A} преобразуются при переходе к другой системе отсчета (повороте в плоскости x, τ) как компоненты вектора \vec{r} в соответствии с преобразованием Лоренца (1.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{A'_1 - \frac{iA'_4V}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ A_2 = A'_2, \\ A_3 = A'_3, \\ A_4 = \frac{A'_4 + \frac{iA'_1V}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Как для обычных векторов скалярное произведение $\sum_i A_i B_i$ – инвариант относительно любых вращений системы координат. В частности, это относится и к квадрату «длины» вектора $\sum_i A_i^2$, но, в отличие от обычных векторов, эта величина может быть отрицательной.

Четырехмерной скоростью частицы (4-скоростью) называется вектор \vec{u} , компоненты которого

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}. \quad (2.3)$$

Согласно (1.1)

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.4)$$

где \vec{v} – трехмерная скорость частицы.

Тогда

$$u_i = \left(\frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (2.5)$$

Не путать индекс i в индексах с мнимой единицей.

Четырехмерным ускорением частицы (4-ускорением) называется вектор \vec{w} , компоненты которого

$$w_i = \frac{du_i}{ds}, \quad (2.6)$$

Квадрат «длины» вектора скорости

$$\sum_i u_i^2 = \sum_i \frac{dx_i^2}{ds^2} = -\frac{ds^2}{ds^2} = -1.$$

Дифференцируя по ds , имеем

$$\sum_i u_i \frac{du_i}{ds} = \sum_i u_i w_i = 0, \quad (2.7)$$

т. е. вектора скорости и ускорения взаимно перпендикулярны.

2.2. Принцип наименьшего действия

Интеграл действия М(1.1) не должен зависеть от выбора системы отсчета, т. е. должен быть инвариантом. Для свободной материальной частицы, не находящейся под действием внешних сил, единственным инвариантом является интервал. Поэтому запишем

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где α – произвольная (пока) постоянная; a и b – начальные и конечные события в движении частицы, начало движения в момент t_1 , конец – t_2 . Если записать действие:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

то для функции Лагранжа, используя (2.4), имеем

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Чтобы определить константу α , произведем предельный переход к классической механике $c \rightarrow \infty$.

$$L \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Постоянный член в функции Лагранжа не отражается на уравнениях движения М(1.2) и поэтому может быть опущен. Сравнивая с классическим выражением для функции Лагранжа свободной частицы

$$L = \frac{mv^2}{2},$$

находим, что $\alpha = mc$ и

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (2.8)$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.9)$$

2.3. Энергия и импульс

Импульсом частицы называется трехмерный вектор М(2.4)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}.$$

Из (1.9) находим

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.10)$$

В пределе $c \rightarrow \infty$ это выражение переходит в классическое $\vec{p} = m\vec{v}$. Сравнивая классическое выражение с (2.10), запишем

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.11)$$

т. е. масса движущегося тела m больше его массы покоя m_0 и стремится к бесконечности при $v \rightarrow c$.

Уравнение движения свободной частицы, как это следует из уравнения Лагранжа, например, в форме М(2.6), есть $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, откуда $\vec{v} = \text{const}$.

Энергией частицы называется величина $\varepsilon = \vec{p}\vec{v} - L$ М(2.2), М(2.4). Подставляя в эту формулу значения \vec{p} и L , находим

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.12)$$

При $v = 0$ отсюда следует, великая формула Эйнштейна для энергии покоя тела

$$\varepsilon = mc^2, \quad (2.13)$$

а при малых скоростях $v \ll c$:

$$\varepsilon \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Из выражений (2.10) и (2.12) следует соотношение

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2}, \quad (2.14)$$

из которого для частиц, движущихся со скоростью света, следует

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \quad (2.15)$$

Со скоростью света может двигаться только частица с нулевой массой покоя (иначе масса движения $m \rightarrow \infty$), например, фотон.

Энергия, выраженная через импульс, называется *функцией Гамильтона* H . Из (2.10) и (2.12) получаем

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (2.16)$$

Можно показать, что импульс и энергия являются компонентами одного четырехмерного вектора $(p_x, p_y, p_z, i\varepsilon/c)$, т. е. преобразуются при переходе к другой системе координат по правилу (2.2). Для этого достаточно, используя выражения для 4-скорости (2.5), для трехмерного импульса (2.10) и для энергии (2.12), увидеть справедливость следующего равенства:

$$p_i = m c u_i,$$

где

$$p_i = p_i \text{ при } i = 1, 2, 3, \text{ а } p_4 = i\varepsilon/c, \quad (2.17)$$

т. е. три компоненты вектора 4-импульса p_i соответствуют трехмерному вектору импульса (2.10), а четвертая выражается через энергию

(2.12). Можно также показать, что, по аналогии с М(4.6), имеет место соотношение

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}.$$

Лекция 3. Заряд в электромагнитном поле

3.1. Четырехмерный потенциал поля

В теории, построенной на принципе наименьшего действия, не нужно отдельно вводить электрическое и магнитное поля и постулировать, как они взаимодействуют с зарядом. Достаточно сказать, что электромагнитное поле в его действии на заряд характеризуется 4-вектором.

Действие для заряда в электромагнитном поле

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} \sum_i A_i dx_i \right) \quad (3.1)$$

где e – заряд частицы, A_i – компоненты четырехмерного потенциала поля, x_i – компоненты четырехмерного радиус-вектора частицы.

Взаимодействие заряда с полем записано в (3.1) единственным возможным способом: из вектора A_i , характеризующего поле, и вектора dx_i , характеризующего частицу, построен скаляр – их скалярное произведение. Три пространственные компоненты потенциала образуют трехмерный вектор \vec{A} , называемый векторным потенциалом, а временная компонента $A_4 = i\varphi$, величина φ называется скалярным потенциалом. Т. о. можно записать:

$$A_i = (\vec{A}, i\varphi), \quad (3.2)$$

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} \cdot \vec{A} d\vec{r} - e\varphi dt \right). \quad (3.3)$$

Принимая во внимание (2.4) и соотношение $d\vec{r} = \vec{v} dt$, получим функцию Лагранжа для заряда в поле

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{A}, \vec{v}) - e\varphi. \quad (3.4)$$

Сравнивая полученное выражение с (2.9), можно увидеть, что взаимодействие с полем описывается слагаемыми $\frac{e}{c} (\vec{A}, \vec{v}) - e\varphi$. Вычисляя импульс частицы по общей формуле М(2.4), находим

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \cdot \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \cdot \vec{A}. \quad (3.5)$$

Видно, что при наличии поля появляется различие между обобщенным импульсом частицы, обозначенным \vec{P} , и просто импульсом \vec{p} (2.10) для свободной частицы (называемым иногда *ньютониевским импульсом*).

Энергию частицы в поле находим по М(2.2)

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (3.6)$$

3.2. Уравнения движения заряда в поле

Подставляя функцию Лагранжа (3.4) в уравнения Лагранжа М(1.2), получаем

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \cdot \vec{A} \right) = \frac{e}{c} \cdot ((\vec{v}, \nabla), \vec{A}) + \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] - e \text{grad } \varphi,$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – векторный дифференциальный оператор; $\text{rot } \vec{A} \equiv [\nabla, \vec{A}]$.

При вычислении величины $\text{grad } \vec{A} \vec{v}$ использована известная формула векторного анализа

$$\text{grad } \vec{a} \vec{b} = (\vec{a}, \nabla) \vec{b} + (\vec{b}, \nabla) \vec{a} + [\vec{b}, \text{rot } \vec{a}] + [\vec{a}, \text{rot } \vec{b}],$$

где \vec{a} и \vec{b} – два любые вектора.

При вычислении полной производной $\frac{d\vec{A}}{dt}$ следует учитывать зависимость от времени координаты частицы

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial r_i} \right) \left(\frac{dr_i}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{A}.$$

Что дает

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \text{grad } \varphi + \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}]. \quad (3.7)$$

Сравнивая это уравнение движения с известным из общего курса физики, получаем следующие выражения для напряженности электрического поля \vec{E} и напряженности магнитного поля \vec{H} :

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad (3.8)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (3.9)$$

Окончательно перепишем уравнение движения частицы в электромагнитном поле в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (3.10)$$

Выражение в правой части (3.10) называется *силой Лоренца*.

Таким образом, из принципов релятивистской теории мы получили известные до нее уравнения теории электромагнетизма, причем само магнитное поле – это чисто релятивистский эффект, исчезающий при стремлении скорости света к бесконечности.

3.3. Калибровочная инвариантность

Два поля физически тождественны, несмотря на различие 4-потенциала A_i , если они характеризуются одними и теми же векторами \vec{E} и \vec{H} . Компоненты 4-потенциала A_i определены неоднозначно, а именно с точностью до величины $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, где f – произвольная функция координат и времени, добавление этой величины не изменяет значения векторов \vec{E} и \vec{H} . Проверим это. Пусть

$$A'_i = A_i + \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Тогда из (3.8) и (3.9) получаем

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{H}' = \vec{H}.$$

Из (3.11) видно, что и векторный и скалярный потенциалы также определены неоднозначно. В частности, к \vec{A} можно прибавить постоянный вектор, а к φ – константу. Все имеющие физический смысл уравнения, содержащие A и φ , должны быть инвариантны относительно преобразования (3.11). Эта инвариантность называется *калибровочной* (или *градиентной*).

Лекция 4. Движение заряженной частицы

в постоянных однородных электрическом и магнитном полях

4.1. Движение заряженной частицы в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряженной частицы в *постоянном однородном электрическом* поле в отсутствие поля магнитного, т. е. при условии $\vec{E} = \text{const}$, $\vec{H} = 0$. Пусть начальный импульс частицы направлен по

оси y , а электрическое поле по оси x . Уравнение движения (3.10) принимает вид

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

откуда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \quad (4.1)$$

Начало отсчета времени было выбрано в момент, когда $p_x = 0$. Отметим, что пока мы получили абсолютно классические формулы. Для того, чтобы найти уравнения движения $x(t)$ и $y(t)$ с учетом формулы (2.10) для импульса, необходимо из (4.1) выразить зависимость компонент скорости от времени, а потом проинтегрировать их по времени. Но возможен и другой способ с использованием (2.16), т. е. выражения энергии частицы через импульс (функция Гамильтона). Обозначим ее как кинетическую энергию, поскольку в поле есть и потенциальная энергия.

$$\varepsilon_{\text{кин}} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} = \sqrt{m^2c^2 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}, \quad (4.2)$$

где ε_0 – энергия при $t = 0$.

Используя соотношение (2.14) $\vec{p} = \frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2}$, для компоненты скорости имеем

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\varepsilon_{\text{кин}}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Интегрируя, получим:

$$x = \frac{1}{eE} \cdot \sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}. \quad (4.3)$$

Точно так же находим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\varepsilon_{\text{кин}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}},$$

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \cdot \ln \frac{ceEt + \sqrt{\varepsilon_0^2 + (ceEt)^2}}{\varepsilon_0} \equiv \frac{p_0 c}{eE} \cdot \text{Arsh} \frac{ceEt}{\varepsilon_0}. \quad (4.4)$$

Читателям предлагается самостоятельно убедиться в том, что синус гиперболический от логарифма в левой части равен аргументу гиперболического арксинуса в правой части.

Уравнение траектории находим, выражая из (4.4) время и подставляя его в выражение (4.3)

$$x = \frac{\varepsilon_0}{eE} \cdot \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}.$$

Мы получили уравнение кривой, которая называется цепной линией (рис. 2.3). Вот таким сложным в релятивистской механике оказывается решение простейшей механической задачи. В классическом пределе (при $c \rightarrow \infty$) из формул (4.3) и (4.4) следует

$$x = x_0 + \frac{eEt^2}{2m} \quad \text{и} \quad y = \frac{p_0 t}{m}.$$

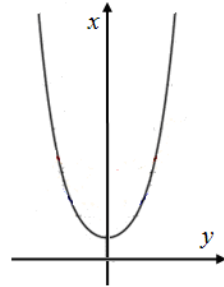


Рисунок 2.3

4.2. Движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим движение частицы в *постоянном однородном магнитном* поле $\vec{H} = \text{const}$, $\vec{E} = 0$.

Докажем вначале, что в магнитном поле энергия частицы не меняется со временем. Домножим уравнение Гамильтона (М 4.1) $\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{v}$ скалярно на $d\vec{p}$ и разделим на dt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (4.5)$$

и подставим в это равенство уравнение движения (3.10)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{H}], \quad \text{которое при } \vec{E} = 0 \text{ имеет вид } \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{H}].$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{H}] = \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot [\vec{v}, \vec{H}]). \quad (4.6)$$

Поскольку векторное произведение $[\vec{v}, \vec{H}]$, перпендикулярное \vec{v} , скалярно умножается на \vec{v} , то мы получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (4.7)$$

Иными словами, $\varepsilon = \text{const}$. Постоянство энергии объясняется тем, что, сила не совершает работу над частицей, поскольку согласно (4.6) действует перпендикулярно ее скорости.

Перепишем уравнение движения (4.6) в другом виде, подставив $\vec{p} = \frac{\varepsilon \vec{v}}{c^2}$ и используя постоянство энергии

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{H}].$$

Или в компонентах, учитывая, что вектор \vec{H} параллелен оси z ,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad (4.8)$$

$$\dot{v}_y = -\omega v_x, \quad (4.9)$$

$$\dot{v}_z = 0, \quad (4.10)$$

где введено обозначение

$$\omega = \frac{ecH}{\varepsilon}. \quad (4.11)$$

Умножим уравнение (4.9) на i и сложим его с (4.8)

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y).$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t}, \quad (4.12)$$

где $a = v_0 e^{-i\alpha}$ — произвольная постоянная; v_0 и α — вещественны.

Тогда

$$v_x + iv_y = a = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)}.$$

Разделим на действительную и мнимую части

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \alpha); v_y = -v_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, т. е. v_0 — это величина скорости в плоскости xu , остающаяся постоянной в процессе движения, а α — начальная фаза. Интегрируя (4.13) по времени, находим

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.14)$$

где $r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 \mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_0}{eH}$, а p_0 — составляющая импульса в плоскости xu .

Из (4.10) имеем

$$z = z_0 + v_{0z} t. \quad (4.15)$$

Из (4.14) и (4.15) видно, что заряд движется по винтовой линии радиусом r и с осью, направленной вдоль магнитного поля, вращаясь с циклической частотой ω в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

В пределе $v \ll c$ частота вращения

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \quad (4.16)$$

Отметим, что остальные формулы одинаковы и в классическом, и в релятивистском случае, что является отражением того факта, что само магнитное поле — релятивистский эффект.

Лекция 5. Движение заряженной частицы в постоянном однородном электромагнитном поле

5.1. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Пусть заряженная частица движется в поле, в котором $\vec{E} = \text{const}$ и $\vec{B} = \text{const}$. Рассмотрим только нерелятивистский случай $v \ll c$ и поэтому импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Направление магнитного поля \vec{H} выберем параллельно оси z , а вектор напряженности электрического поля \vec{E} лежит в плоскости xu . В этом случае уравнения движения

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]$$

имеют вид

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} \cdot yH, \quad (5.1)$$

$$m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c} \cdot xH, \quad (5.2)$$

$$m\ddot{z} = eE_z. \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует уравнение, описывающее равноускоренное движение вдоль оси z :

$$z = \frac{eE_z t^2}{2m} + v_{0z} t. \quad (5.4)$$

В свою очередь, умножая уравнение (5.2) на i и складывая его с (5.1), получаем

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m} E_y, \quad (5.5)$$

где $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения (4.13) и частного решения неоднородного уравнения.

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}. \quad (5.6)$$

Отделяя действительную и мнимую части и полагая для упрощения записи начальную фазу равной нулю, находим

$$\dot{x} = a \cdot \cos \omega t + \frac{cE_y}{H}, \quad (5.7)$$

$$\dot{y} = -a \cdot \sin \omega t. \quad (5.8)$$

Таким образом, эти компоненты скорости являются периодическими функциями времени. Их средние по времени значения равны

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{H}, \quad \langle \dot{y} \rangle = 0. \quad (5.9)$$

Эту среднюю скорость движения заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях называют *скоростью дрейфа* (дрейфовой скоростью). Она перпендикулярна обоим полям и не зависит от знака заряда. В векторном виде ее можно записать как

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{c[\vec{E}, \vec{H}]}{H^2}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) видно, что необходимым условием нерелятивистского случая является неравенство $E_y \ll H$. Интегрируя уравнения (5.7) – (5.8) и выбирая постоянные так, чтобы $x = y = 0$ при $t = 0$, получаем

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H} t, \quad (5.11)$$

$$y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \quad (5.12)$$

Таким образом, частица в плоскости, перпендикулярной магнитному полю \vec{H} , движется по круговой траектории со смещением вдоль оси x (рис. 2.4).

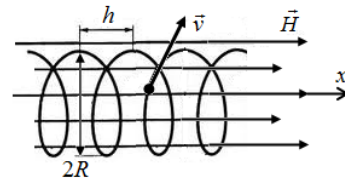


Рисунок 2.4

5.2. Преобразование Лоренца для поля

При переходе от одной инерциальной системы к другой электрическое и магнитное поля преобразуются определенным образом. Это связано с тем, что изменяются силы, действующие на заряды. Найдем закон этого преобразования. Проще всего обстоит дело с четырехмерным потенциалом A , компоненты которого трансформируются, как и полагается компонентам четырехмерного вектора, согласно преобразованиям Лоренца.

В соответствии с формулами (2.2) и (3.2) четырехмерный потенциал преобразовывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{\left(A'_x + \frac{V\phi'}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z \\ \phi = \frac{\left(\phi' + \frac{VA'_x}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Для того чтобы найти преобразование для E и H , нужно воспользоваться выражениями (3.8) и (3.9) для напряженностей, выраженных через A . Для примера найдем преобразование для H_y .

Как следует из (3.9),

$$H_y = (\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x'} - \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial t'}. \quad (5.14)$$

При нахождении производных $\frac{\partial x'}{\partial x}$ и $\frac{\partial t'}{\partial x}$ следует учесть, что замена системы K системой K' в формулах преобразования Лоренца (1.4) означает изменение знака скорости V :

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{Vc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (5.16)$$

Подставляя выражения (5.15) и (5.16) в (5.13) и (5.14) получаем

$$H_y = \frac{\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} + \frac{V \partial \phi'}{c \partial z'} + \frac{V \partial A'_z}{c^2 \partial t'}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (5.17)$$

И, используя (3.8) и (3.9), окончательно получаем

$$H_y = \frac{H'_y - \frac{VE'_z}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \quad (5.18)$$

Аналогично находим преобразование всех компонент электрического и магнитного полей

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{VH'_z}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z + \frac{VH'_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (5.19)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y + \frac{VE'_z}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{VE'_y}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad (5.20)$$

Проанализируем полученный результат. Если в системе K' есть только электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами, то в

другой системе возникает и магнитное поле, поскольку в системе K эти заряды движутся, а движущиеся заряды, как известно из курса общей физики, создают магнитное поле. Из нашего же вывода (5.19) четко видно, что магнитное поле возникает как требование теории относительности – из правила преобразования четырехмерных векторов. И наоборот, если в K' имеется магнитное поле, то в соответствии с (5.20) в K появляется электрическое.

Интересно, а можно ли найти такую систему отсчета, в которой электрическое поле исчезает? Направим в системе K' ось z вдоль направления магнитного поля так, чтобы вектор напряженности электрического поля находился в плоскости yz . Из (5.19) видно, что $E_x = E'_x = 0$, а компоненту вдоль поля E_z нельзя уничтожить за счет скорости (она не равна нулю в обеих системах K и K'). А вот компоненту E_y , которая перпендикулярна магнитному полю \vec{H} уничтожить можно, если $\frac{V}{c} = -\frac{E'_y}{H}$.

Иными словами, в системе K' , движущейся относительно системы K со скоростью $\vec{V} = \frac{c[\vec{E}, \vec{H}]}{H^2}$, перпендикулярная магнитному полю составляющая электрического поля равна нулю. Это соображение делает очевидным результаты (5.7), (5.8) и (5.10) о движении заряда в скрещенных полях: в системе отсчета, движущейся с дрейфовой скоростью, отсутствует составляющая электрического поля в плоскости xu и поэтому движение в этой плоскости есть чистое вращение, в соответствии с формулами (4.8), (4.9) и (4.10).

5.3. Первые два уравнения электромагнитного поля

Из выражений (3.8) и (3.9) для напряженностей электрического и магнитного полей

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi, \quad (5.21)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (5.22)$$

Возьмем ротор от (5.21) и дивергенцию от (5.22) и, воспользовавшись тем, что $\text{rot}(\text{grad} \phi) = 0$ и $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$, получим

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (5.23)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (5.24)$$

Уравнения (5.23) и (5.24) – это первая пара уравнений Максвелла.

Подводя итог, отметим, что на основании принципа наименьшего действия и предположения, что электромагнитное поле – это четырехмерный вектор, мы вывели электрическое и магнитное поле, их взаимодействие с зарядами и первые два уравнения для самих полей. Но для вывода остальных двух уравнений этого будет недостаточно. Дело в том, что мы еще не определяли, как заряды влияют на поле и как поле действует само на себя.

ЛЕКЦИЯ 6. Действие для электромагнитного поля

6.1. Тензор электромагнитного поля

Действие для системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S = S_m + S_{mf} + S_f, \quad (6.1)$$

где S_m и S_{mf} – слагаемые в формуле (3.1) (если частиц несколько, следует просуммировать по частицам). Первое слагаемое S_m – это действие для частиц, второе слагаемое S_{mf} учитывает взаимодействие между частицами и полем, а третье слагаемое S_f – это действие для самого поля, поскольку поле может существовать и в отсутствии частиц.

Действие S_{mf} содержит характеристику поля и характеристику частицы в первой степени. Это естественно, поскольку учитывает взаимодействие поля и частицы. Логично, что величина, учитывающая действие поля само на себя, должна быть квадратичной по какой-то характеристике поля и быть скаляром. Скажем, $A^2 = \sum_i A_i^2$ не подходит, поскольку,

потенциал A_i определен неоднозначно, и с таким третьим слагаемым в (6.1) уравнения для поля не были бы градиентно-инвариантными. Правой физической смысл имеют напряженности электрического и маг-

нитного поля, выражающиеся как производные от четырехмерного потенциала $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$. Последняя величина имеет два индекса, нумерующие

проекции на координатные оси. Такие величины называются тензорами. Они преобразуются при поворотах системы координат как произведение проекций двух векторов.

Тензором электромагнитного поля называется антисимметричный тензор

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \quad (6.2)$$

Антисимметричность

$$F_{ki} = -F_{ik}.$$

Действие для поля

$$S_f = -\frac{1}{16\pi} \sum_{ik} \int (F_{ik})^2 dV dt, \quad (6.3)$$

где интеграл по координатам берется по всему пространству, а по времени – между двумя заданными моментами. Численный коэффициент в (6.3) соответствует определенному выбору системы единиц. Мы будем использовать так называемую гауссову систему, а окончательные уравнения мы запишем и в СИ.

Необходимость суммирования по индексам понятна из того, что действие должно быть инвариантом (скаляром), т. е. не должно иметь своих индексов. Аналогично скаляром есть и скалярное произведение двух векторов $\sum_i a_i b_i$.

В соответствии с выражением (3.2) для четырехмерного потенциала и формулами (3.8) и (3.9) для напряженностей электрического и магнитного полей имеем:

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

и для величины S_f получаем

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV dt. \quad (6.5)$$

Как видно из (6.4), в компоненты тензора поля входят все компоненты электрического и магнитного полей, поэтому именно этот тензор и фигурирует в выражении для действия поля. Уравнения движения (3.10) тоже можно записать, используя этот тензор, причем в четырехмерном виде.

6.2. Уравнения движения заряда в четырехмерном виде

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} \sum_k F_{ik} u_k, \quad (6.6)$$

где u_k – компоненты четырехмерной скорости (1.3).

Легко убедиться, используя (6.4) и равенство $ds = \sqrt{c^2 - v^2} dt$, что три пространственные компоненты уравнения (6.6) тождественны уравнению движения (3.10), а четвертая тождественна уравнению

$$\frac{d\varepsilon_{кин}}{dt} = e\vec{E}\vec{v}, \quad \varepsilon_{кин} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (6.7)$$

которое выражает изменение кинетической энергии заряда в поле, и которое сразу следует из (4.5) и уравнения движения (3.10).

6.3. Четырехмерный вектор тока

Рассматривая заряды не как точечные, а как распределенные в пространстве, введем плотность заряда $\rho = dq/dV$. Тогда можно считать, что в объеме dV находится заряд ρdV . Введение плотности позволяет перейти от суммирования по зарядам к интегрированию по объему

$$e \sum_a f(\vec{r}_a) = \int \rho(\vec{r}) f(\vec{r}) dV, \quad (6.8)$$

где $f(\vec{r})$ – произвольная функция.

Интегрирование ведется по всему пространству или в пределах всей системы, включающей поле и взаимодействующие с ним частицы.

Используя (6.8), перепишем выражение для действия (6.1) с учетом (3.1) и (6.3) в виде

$$S = - \sum_a \int m_a c ds_a + \frac{1}{c} \sum_i A_i j_i dV dt - \frac{1}{16\pi} \sum_{ik} \int (F_{ik})^2 dV dt. \quad (6.9)$$

В (6.9) введена величина 4-вектора тока, которая определяется следующим образом

$$j_i = \rho \frac{dx_i}{dt}. \quad (6.10)$$

Три его пространственные компоненты образуют трехмерный вектор плотности тока

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (6.11)$$

где \vec{v} – скорость заряда в данной точке,

$$j_4 = ic\rho. \quad (6.12)$$

Формулы (6.8) и (6.9) имеют смысл не только для распределенных в пространстве зарядов.

В случае точечных зарядов

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (6.13)$$

где δ – это дельта-функция Дирака (δ -функция).

6.4. Краткие сведения о δ -функции Дирака

δ -функция широко применяется во многих задачах физики. Эту функцию, описывающую плотность точечной частицы, следует понимать как предел функции типа «колокола», быстро убывающей при отходе от максимума; предел при стремлении ширины области ее неисчезающих значений к нулю. При указанном стремлении высота графика этой функции растет так, чтобы площадь под графиком не изменялась.

Более формально δ -функция определяется следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ \infty & \text{при } x = 0 \end{cases}, \quad (6.14)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (6.15)$$

Из этого определения вытекают следующие свойства:

1. Если $f(x)$ – любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a). \quad (6.16)$$

В частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$2. \quad \delta(x) = \delta(-x)$$

$$3. \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$4. \quad \delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|} \delta(x-a_i), \quad (6.17)$$

где $\varphi(a_i) = 0$.

ЛЕКЦИЯ 7. Вторая пара уравнений Максвелла

7.1. Уравнение непрерывности

Если при нахождении уравнений движения из принципа наименьшего действия мы считали поля заданными и варьировали траекторию частиц, то при нахождении уравнений поля мы должны считать движение зарядов заданным и варьировать в (6.9) потенциалы поля, играющие здесь роль «координат» системы:

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{c} \sum_i j_i \delta A_i - \frac{1}{16\pi} \sum_{ik} \delta F_{ik}^2 \right] dV dt = 0.$$

Подставляем значение F_{ik} (6.2) и имеем

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{c} \sum_i j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} \sum_{ik} F_{ik} \left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x_k} \right) \right] dV dt.$$

Для первого слагаемого в круглых скобках меняем местами индексы i и k , а также пользуемся антисимметричностью тензора F_{ik} . Тогда получим

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{c} \sum_i j_i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{ik} F_{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x_k} \right] dV dt.$$

Второй из этих интегралов «берем по частям в 4-пространстве», т. е. применяем теорему Гаусса при интегрировании по объему и интегрируем по частям по времени:

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{c} \sum_i j_i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} \sum_{ik} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \delta A_i \right] dV dt + \frac{i}{4\pi c} \int F_{ik} \delta A_i dS_k \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Последний интеграл равен нулю по двум причинам: в начальный и конечный моменты времени поле фиксировано, а интегрирование ведется по бесконечно удаленной поверхности, где поле исчезает. Таким образом,

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{c} \sum_i j_i - \frac{1}{4\pi} \sum_{ik} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right] \delta A_i dV dt = 0$$

и поскольку вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент перед δA_i :

$$\sum_k \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad (7.1)$$

Это и есть четырехмерное уравнение для поля. Его пространственные компоненты (см. (6.4) для элементов тензора поля) эквивалентны следующему векторному уравнению

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (7.2)$$

а четвертая компонента дает

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (7.3)$$

Выражения (7.2) и (7.3) являются второй парой уравнений Максвелла и вместе с (5.9) и (5.10) составляют основу теории электромагнитного поля – электродинамики.

Заметим следующее обстоятельство. Если взять дивергенцию от (7.2) и использовать (7.3), то получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (7.4)$$

Это так называемое *уравнение непрерывности*. Оно, собственно, не имеет отношения к теории поля, а выражает закон сохранения электрического заряда. Действительно, если проинтегрировать (7.4) по произвольной области пространства, ограниченной поверхностью S и применить теорему Гаусса, то получается

$$\partial \int \rho \frac{dV}{\partial t} = - \int \vec{j} d\vec{S},$$

т. е. изменение полного заряда в объеме равно притоку заряда через ограничивающую объем поверхность, что соответствует Ломоносовской формулировке закона сохранения: «если где чего прибавит, то в другом месте столько и убавит».

Таким образом, введя один 4-вектор поля и построив из него 4-тензор, мы с помощью принципа наименьшего действия построили всю электродинамику (или, как минимум, ее основы).

7.2. Плотность и поток энергии. Вектор Пойнтинга

Умножим обе части уравнения (7.2) на \vec{E} , а уравнения (5.23) на \vec{H} и почленно вычтем полученные уравнения:

$$\frac{1}{c} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - (\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}).$$

Воспользуемся известной формулой векторного анализа

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$$

и получим

$$\frac{1}{2c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - \text{div} [\vec{E}, \vec{H}]$$

или

$$\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) = -\vec{j} \vec{E} - \text{div} \vec{S}. \quad (7.5)$$

Вектор

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \quad (7.6)$$

называют *вектором Пойнтинга*.

Проинтегрируем (7.5) по некоторому объему и применим к последнему члену теорему Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int \vec{E} \vec{j} dV - \oint \vec{S} d\vec{f}. \quad (7.7)$$

Последний интеграл в правой части берется по ограничивающей объем замкнутой поверхности, где $d\vec{f}$ – элемент площади этой поверхности. Подынтегральное выражение первого интеграла в правой части

с помощью (6.7) выражается через изменение кинетической энергии частиц, находящихся в данном объеме (см. также (6.11) и (6.8)):

$$\int \vec{E} j dV = \sum_a e_a \vec{v}_a \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_a \varepsilon_{кин}.$$

В итоге из (7.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum_a \varepsilon_{кин} \right) = - \oint \vec{S} d\vec{f}. \quad (7.8)$$

Из (7.8) следует, что величина

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (7.9)$$

имеет смысл *плотности энергии электрического поля* (энергии единицы объема), а вектор Пойнтинга – это плотность потока энергии. Уравнение (7.9) выражает сохранение суммарной энергии зарядов и поля.

Лекция 8. Уравнения Максвелла

8.1. Уравнения Максвелла в СИ

Система четырех уравнений Максвелла и два материальных уравнения, записанные в СИ, имеет вид

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, магнитная постоянная $\mu_0 = 12,56 \cdot 10^{-7}$ Гн/м, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно; для вакуума $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

Единицы электромагнитных величин в СГС и в СИ

Объемная плотность заряда $[\rho] = 1$ ед. СГС $\approx 3,34 \cdot 10^{-10}$ Кл/м³;

Плотность электрического тока $[j] = 1$ ед. СГС $\approx 3,34 \cdot 10^{-6}$ А/м²;

Напряженность электрического поля $[E] = 1$ ед. СГС $\approx 3 \cdot 10^4$ В/м;

Напряженность магнитного поля $[H] = 1$ Эрстед $\approx 79,6$ А/м;

Индукция электрического поля $[D] = 1$ ед. СГС $\approx 7,96 \cdot 10^{-7}$ Кл/м²;

Индукция магнитного поля $[B] = 1$ Гаусс = 10^{-4} Тл.

8.2. Краткие математические сведения

В определенном смысле теоремы Гаусса, Стокса, формула интегрирования по частям родственны между собой и являются следствием простейшей формулы математического анализа:

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \equiv f(x) \Big|_a^b, \quad (8.1)$$

которая сама есть следствие основной в интегральном исчислении формулы Ньютона-Лейбница. Формула (8.1) гласит, что интеграл от производной функции выражается через значения функции на концах интегрирования. Если функция f является произведением двух функций ($f = gh$), то из (8.1) получаем

$$\int_a^b \left[h \left(\frac{dg}{dx} \right) + g \left(\frac{dh}{dx} \right) \right] dx = gh \Big|_a^b$$

или

$$\int_a^b h \left(\frac{dg}{dx} \right) dx = - \int_a^b g \left(\frac{dh}{dx} \right) dx + gh \Big|_a^b, \quad (8.2)$$

т. е. получаем формулу интегрирования по частям: интеграл от произведения функции на производную от другой функции выражается через интеграл, в котором производная берется от другой функции и внеинтегральный член – разность произведения этих функций на краях интервала.

Посмотрим теперь с этой точки зрения на теорему Гаусса

$$\int \operatorname{div} \vec{Q} dV = \oint \vec{Q} d\vec{S}. \quad (8.3)$$

В (8.3) \vec{Q} – произвольный, зависящий от координат вектор. Интегрирование левого выражения ведется по некоторому объему; dV – элемент объема. Интегрирование правого выражения ведется по замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем. $d\vec{S}$ – векторный элемент площади поверхности, численно равный площади элементарной площадки и направленный по внешней нормали к поверхности в данной ее точке. Формула (8.3) по сути является трехмерным аналогом одномерной формулы (8.1): операция «дивергенция от вектора» – это аналог производной от функции, «краями» объемного интервала является его поверхность, поэтому значения на краях превращаются в интеграл по поверхности. Чтобы перейти в (8.3) к одномерному случаю, предположим, что вектор \vec{Q} направлен по оси x и что зависит он только от x , т. е. $\vec{Q} = f(x)\vec{i}$, а в качестве объема возьмем прямоугольник, который по x располагается между a и b , а грань, перпендикулярная x имеет единичную площадь. Тогда из (8.3) мы получаем (8.1)

$$\operatorname{div} \vec{Q} = \frac{dQ_x}{dx} = \frac{df}{dx},$$

интеграл по грани в точке b равен $f(b)\vec{i}\vec{S} = f(b)$, а $f(b)\vec{i}(-\vec{S}) = -f(a)$, поскольку внешняя нормаль в точке a направлена противоположно оси x . Потоки же через боковые грани равны нулю, поскольку вектор \vec{Q} перпендикулярен нормальям к ним. Т. е. в одномерном случае (8.3) превращается в (8.1).

Совершенно аналогично формуле интегрирования по частям (8.2) для двух функций (скалярной f и векторной \vec{Q}) в трехмерном случае получаем

$$\int f \cdot \operatorname{div} \vec{Q} dV = -\int \vec{Q} \cdot \operatorname{grad} f dV + \oint f \vec{Q} d\vec{S}, \quad (8.4)$$

трехмерный аналог производной от скаляра – градиент.

После сказанного очевидно, что теорема Стокса есть двумерный аналог формулы (8.1).

$$\int \operatorname{rot} \vec{Q} d\vec{S} = \oint \vec{Q} d\vec{l}. \quad (8.5)$$

Интегрирование в левой части выражения осуществляется по произвольной поверхности, а справа – по ограничивающей ее линии. Элемент длины равен dl и направлен по касательной. В целом все написанные формулы – это только частные аналоги формулы (8.1).

Распишем формулу (8.3) в виде $\sum_i \int \left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \right) dV = \sum_i \oint Q_i dS_i$ и подумаем, а важна ли в этой формуле сумма?

Запишем без суммы

$$\int \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) dV = \oint F dS_i \quad (8.6)$$

и докажем правильность, разбивая объем на бесконечно тонкие трубки, параллельные оси x , и для каждой используя формулу (8.1). Здесь F – любая (скалярная, векторная, тензорная) функция. Если F – скаляр, то $F = f$. Тогда из (8.6) прямо следует

$$\int \operatorname{grad} f \cdot dV = \oint f d\vec{S}. \quad (8.7)$$

Если же F – компонента вектора, то $F = Q_k$. Тогда составляя из производных $\frac{\partial Q_k}{\partial x_i}$ компоненты вектора $\operatorname{rot} \vec{Q}$, мы получим из (8.6)

$$\int \operatorname{rot} \vec{Q} \cdot dV = \oint [d\vec{S}, \vec{Q}]. \quad (8.8)$$

Точно так же, как из (8.3) мы получили (8.4) – формулу типа интегрирования по частям, а из (8.6) получим

$$\int G \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) dV = -\int F \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \right) dV + \oint FG dS_i, \quad (8.9)$$

где G и F – любые функции.

Это самый общий вид интегрирования по частям в трехмерном случае. Аналогичные действия можно проделать и с двумерным интегрированием типа теоремы Стокса. Важным выводом из всего вышесказанного является то, что существует общность во многих математических выражениях и операциях, которые на первые взгляд кажутся разными.

И еще несколько замечаний по поводу плотности и потока энергии (7.8)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum_a \varepsilon_{кин} \right) = - \oint \vec{S} d\vec{f}.$$

В предыдущей лекции было кратко отмечено, что эта формула выражает сохранение энергии. Имеет смысл добавить еще следующее.

Левая часть равенства представляет собой изменение со временем (или в единицу времени) некоторой величины, которую естественно считать энергией поля и частиц в некотором объеме; второе слагаемое – энергия частиц. Подынтегральная функция этого выражения – это энергия единицы объема поля, т. е. плотность энергии поля. Интегрирование в правой части ведется по ограничивающей объем поверхности, где $d\vec{f}$ – элемент площади этой поверхности. Поэтому интеграл имеет смысл энергии, уносимой полем из объема через поверхность. Следовательно, величина вектор Пойнтинга \vec{S} – это плотность потока энергии. Если площадка $d\vec{f}$ расположена перпендикулярно вектору \vec{S} , т. е. внешняя нормаль к ней параллельна ему, то $\vec{S}d\vec{f} = Sdf$. Тогда S – это количество энергии, протекающее в единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно к направлению потока энергии. Любая плотность потока какой-либо величины имеет именно такой смысл, например, плотность электрического тока – это заряд, протекающий в единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно к направлению тока.

ЛЕКЦИЯ 9. Постоянное электромагнитное поле. Закон Кулона. Энергия зарядов

9.1. Уравнение Пуассона. Закон Кулона

Для постоянного электрического (электростатического) поля уравнения Максвелла (7.3) и (5.23) имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (9.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (9.2)$$

Четырехмерный потенциал при этом удобно выбрать так, чтобы от нуля отличалась только 4-ая компонента – скалярный потенциал φ , а векторный потенциал (3.2). $\vec{A} = 0$. Тогда из (3.9) имеем $\vec{H} = 0$, а из (3.8)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (9.3)$$

Кстати, мы могли это написать и не обращаясь к четырехмерному потенциалу: из математической теории поля известно, что векторное поле, ротор которого равен нулю, является градиентом некоторого скалярного поля – это следствие *теоремы Гельмгольца*.

Подставляя (9.3) в (9.1), получаем уравнение для потенциала постоянного электрического поля – *уравнение Пуассона*:

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho. \quad (9.4)$$

В пустоте, т. е. при $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \quad (9.5)$$

Определим поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно направлено в каждой точке по радиус-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e . Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E напряженности поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения E проинтегрируем уравнение (9.1) по объему шара радиуса R , центр которого совпадает с зарядом. По теореме Гаусса имеем

$$\int \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV$$

или

$$4\pi R^2 E = 4\pi e,$$

откуда

$$E = \frac{e}{R^2} \quad (9.6)$$

или в векторном виде

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3}. \quad (9.7)$$

Это и есть *закон Кулона*.

Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{e}{R}, \quad (9.8)$$

что легко проверить, пользуясь (9.3).

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемый ими потенциал равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}, \quad (9.9)$$

где R_a – расстояние от заряда e_a до точки, в которой мы ищем потенциал.

Если ввести плотность заряда ρ , то согласно (6.8) имеем

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (9.10)$$

где расстояние от элемента объема dV до точки, потенциал которой вычисляется, равно $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$, а \vec{r} и \vec{r}_0 – радиус-векторы элемента объема и точки наблюдения, соответственно.

В Лекции 6 плотность заряда точечного заряда выражалась через δ -функцию. Подставляя выражение (6.14) для одного заряда в формулу (9.4) с учетом (9.8), получаем

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\vec{R}). \quad (9.11)$$

Это соотношение нетрудно проверить при $\vec{R} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{R}\right) &= \text{div grad}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\text{div}\left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \\ &= -\frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Иными словами, функция $1/R$ при $\vec{R} \neq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа (9.5).

9.2. Электростатическая энергия зарядов

Используя формулу (7.9) для плотности энергии поля, запишем полную энергию электростатического поля

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV. \quad (9.12)$$

Интегрирование ведется по всему пространству. Причина, по которой данная энергия обозначена буквой U , как потенциальная, будет понятна позднее. Подставляя в (9.12) напряженность \vec{E} (9.3), получаем

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \text{grad} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \left(\int \text{div}(\vec{E} \varphi) dV - \int \varphi \text{div} \vec{E} dV \right).$$

Первый из этих интегралов по теореме Гаусса равен интегралу по бесконечно удаленной поверхности и поэтому равен нулю (поле там = 0). Подставляя во второй интеграл уравнение Максвелла (7.3), получаем

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV, \quad (9.13)$$

а для системы точечных зарядов, используя (6.8)

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a, \quad (9.14)$$

где φ_a – потенциал в точке расположения a -го заряда.

Сравните (9.14) со школьной формулой для потенциальной энергии заряда в поле $U = e\varphi$, где потенциал определяется как энергия единичного заряда в поле, а также с формулой (3.6) для энергии заряда в поле. Кажется, что в формуле (9.14) присутствует лишняя «половинка». На самом деле тут нет противоречия. Поскольку суммирование ведется по всем зарядам, то следует учитывать, что один заряд создает потенциал для другого, а другой, в свою очередь, создает потенциал для первого. Коэффициент $1/2$ в (9.14) как раз и устраняет это удвоение.

Из (9.14) нетрудно понять, что энергия статического электрического поля – это потенциальная энергия зарядов в поле или, другими словами, потенциальная энергия взаимодействия зарядов друг с другом, поскольку именно заряды создают поле. Чтобы убедиться в этом, подставим в (9.14) значение потенциала из закона Кулона (9.9)

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} = \sum_{a > b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}, \quad (9.15)$$

где U^* – имеющая физический смысл потенциальная энергия взаимодействия зарядов, не включающая взаимодействие точечного заряда самого с собой ($a = b$), а R_{ab} – расстояние между зарядами a и b .

Соответственно, вместо (9.14) следует написать формулу,

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a^*, \quad (9.16)$$

где

$$\varphi_a^* = \sum_{a \neq b} \frac{e_b}{R_{ab}}, \quad (9.17)$$

представляет собой имеющий физический смысл потенциал в точке a , который не учитывает вклада точечного заряда, расположенного в этой точке.

И в завершение данной лекции стоит напомнить несколько математических определений, которые нам понадобятся в следующей лекции.

Дифференциал – главная, линейная по изменению переменных часть изменения функции. Пусть имеем функцию $f(x_1, x_2, \dots) \equiv f(x_i)$. тогда дифференциал функции нескольких переменных

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

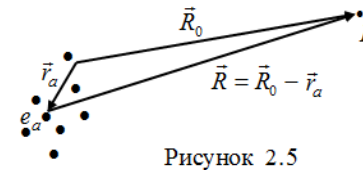
Коэффициенты перед дифференциалами переменных в этой сумме – частные производные функции по соответствующим переменным, т. е. производные при предположении постоянства других переменных. яд Тейлора

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(\Delta x)^n + \dots$$

ЛЕКЦИЯ 10. Дипольный и мультипольные моменты

10.1. Диполь. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших размеров системы.



Расположим начало координат внутри системы зарядов (рис. 2.5). Если \vec{r}_a – радиус-векторы отдельных зарядов, то потенциал поля (9.9), создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором \vec{R}_0 , равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|}. \quad (10.1)$$

Исследуем это выражение при больших R_0 , т. е. при $R_0 \gg r_a$. Для этого разложим его в ряд по степеням малого отношения r_a/R_0 . Любая функция от разности векторов $f(\vec{R}_0 - \vec{r})$ может быть разложена в степенной ряд по компонентам r_i как функция трех переменных

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}) = f(\vec{R}_0) - \sum_i \frac{\partial f(\vec{R}_0)}{\partial R_{0i}} r_i + \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial^2 f(\vec{R}_0)}{\partial R_{0i} \partial R_{0k}} r_i r_k + \dots \quad (10.2)$$

Это разложение функции в ряд Тейлора по трем переменным – r_i . Первый член разложения не содержит малой величины r , второй

содержит ее в 1-ой степени, третий – во второй и т. д. Соответственно, можно написать

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots, \quad (10.3)$$

где каждый член разложения пропорционален соответствующей степени r_a : $\varphi^{(1)} \sim r_a^1$. Данное разложение потенциала на больших расстояниях от системы зарядов называется *мультипольным* разложением.

Определим несколько первых членов этого разложения. Используя (10.2) для каждого члена суммы по a в (10.1) и заменяя \vec{r} на \vec{r}_a , получаем:

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{R_0} \sum_a e_a, \quad (10.4)$$

$$\varphi^{(1)} = - \sum_a e_a \vec{r}_a \text{grad} \left(\frac{1}{R_0} \right)$$

или

$$\varphi^{(1)} = \frac{(\vec{d}, \vec{R}_0)}{R_0^3}, \quad (10.5)$$

где

$$\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a. \quad (10.6)$$

Таким образом, в главном (нулевом) приближении систему можно заменить точечным зарядом, равным суммарному заряду системы. Если суммарный заряд системы равен нулю (например, для атома), то $\varphi^{(0)} = 0$.

Вектор \vec{d} называется *дипольным моментом системы зарядов*, а $\varphi^{(1)}$ – *дипольным членом разложения потенциала*.

Отметим, что потенциал $\varphi^{(1)}$ быстрее спадает с увеличением расстояния от системы зарядов, чем $\varphi^{(0)}$: $\varphi^{(1)} \sim \frac{1}{R_0^2}$. Потенциал $\varphi^{(1)}$ меньше

потенциала $\varphi^{(0)}$ примерно в $\frac{r_a}{R_0}$ раз при условии, что суммарный заряд

не равен нулю. В теоретической физике в этом случае считается, что разложение ведется по малому параметру $\frac{r_a}{R_0}$. Это означает, что каждый последующий член разложения меньше предыдущего примерно в это число раз.

В скалярном виде выражение (10.5) имеет вид

$$\varphi^{(1)} = \frac{d \cos \alpha}{R_0^2}, \quad (10.7)$$

где α – угол между направлениями \vec{R}_0 и дипольного момента \vec{d} .

10.2. Квадрупольный момент системы зарядов

Напряженность электрического поля $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ (9.3) также может быть подвергнута мультипольному разложению

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \dots, \vec{E}^{(k)} = -\text{grad} \varphi^{(k)}. \quad (10.8)$$

Для $\vec{E}^{(1)}$ имеем

$$\vec{E}^{(1)} = \frac{3(\vec{n}, \vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}, \quad (10.9)$$

где \vec{n} – единичный вектор в направлении \vec{R}_0 .

Из (10.9) видно, что дипольный вклад в напряженность зависит от расстояния до системы зарядов пропорционально $\frac{1}{R_0^3}$. Этот вклад является главным для электронейтральной системы зарядов, т. е. при $\sum_a e_a = 0$ $\vec{E}^{(0)} = 0$. В системе координат, направление оси z которой совпадает с направлением \vec{d} , а вектор \vec{R}_0 лежит в плоскости xz (его азимутальный угол ϑ)

$$E_x^{(1)} = \frac{2d \cos^2 \vartheta}{R_0^3}, \quad E_z^{(1)} = \frac{3d \sin \vartheta \cos \vartheta}{R_0^3}. \quad (10.10)$$

В простейшем случае системы из двух одинаковых по величине, но разных знаков зарядов ($e_2 = -e_1 = e$) ее дипольный момент, как следует из (10.6), равен

$$\vec{d} = e\vec{r}_{12}, \quad (10.11)$$

где \vec{r}_{12} – радиус-вектор от заряда 2 к заряду 1.

В случае особой симметрии расположения заряда дипольный момент системы может быть равен нулю (рис. 2.6).

Найдем квадрупольный член разложения $\varphi^{(2)}$. Из (10.1) и (10.2) получаем

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_a e_a \sum_{ik} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R_0} \right)}{\partial R_{0i} \partial R_{0k}} r_{ai} r_{ak},$$

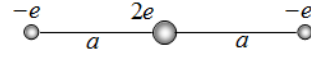


Рисунок 2.6

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R_0} \right)}{\partial R_{0i} \partial R_{0k}} = \frac{3R_{0i}R_{0k}}{R_0^5} - \frac{\delta_{ik}}{R_0^3},$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_a e_a \cdot \frac{1}{R_0^3} \sum_{ik} (3n_i n_k r_{ai} r_{ak} - r_a^2),$$

где $r_a^2 = \sum_i r_{ai}^2 = \sum_{ik} \delta_{ik} r_{ai} r_{ak}$.

Поскольку $\sum_{ik} \delta_{ik} n_i n_k = 1$, получаем

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2R_0^3} \sum_{ik} D_{ik} n_i n_k,$$

где

$$D_{ik} = \sum_a e_a (3r_{ai} r_{ak} - r_a^2 \delta_{ik}). \quad (10.12)$$

Тензор D_{ik} называется *квадрупольным моментом системы зарядов*.

Из процедуры разложения ясно, что произвольный член мультипольного разложения равен

$$\varphi^{(k)} \approx \left(\frac{e_a M}{R_0} \right) \left(\frac{r_a}{R_0} \right)^k,$$

где M – функция от углов, определяющих направление вектора \vec{R}_0 относительно системы зарядов.

10.3. Система зарядов во внешнем поле

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем квазиоднородном электрическом поле, т. е. в поле, слабо меняющемся на протяжении этой системы. Это имеет место в том случае, если поле создано далекими от этой системы зарядами. Согласно (3.6) потенциальная энергия зарядов во внешнем поле равна

$$U = \sum_a e_a \varphi(\vec{r}_a). \quad (10.13)$$

Поскольку поле на расстояниях \vec{r}_a изменяется слабо, разложим энергию в ряд по степеням этой величины

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + \dots, \quad (10.14)$$

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a, \quad (10.15)$$

где φ_0 – потенциал в начале координат.

В низшем приближении систему можно считать суммарным точечным зарядом. В следующем приближении

$$U^{(1)} = (\text{grad } \varphi)_0 \sum_a e_a \vec{r}_a = -\vec{E}_0 \vec{d}, \quad (10.16)$$

где \vec{E}_0 – напряженность поля в начале координат, а \vec{d} – дипольный момент системы.

Полная сила, действующая на систему зарядов с точностью до членов первого порядка включительно, равна

$$\vec{F} = -\text{grad}U = \vec{E}_0 \sum_a e_a + \left((\vec{d}, \nabla), \vec{E} \right)_0. \quad (10.17)$$

Для нейтральной системы зарядов отлично от нуля только второе слагаемое.

Сила, действующая на каждый заряд системы $\vec{f}_a = e_a \vec{E}(\vec{r}_a)$, поэтому полный момент всех действующих на систему сил равен

$$\vec{K} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{f}_a] \approx \sum_a e_a [\vec{r}_a, \vec{E}_0] = [\vec{d}, \vec{E}_0]. \quad (10.18)$$

Рассмотрим взаимодействие двух систем зарядов, расстояние между которыми велико по сравнению с размерами каждой системы. Пусть суммы зарядов в каждой из них равны нулю, т. е. обе системы являются электронейтральными. Одну из этих систем (для определенности, вторую) можно рассматривать как находящуюся в поле другой, тогда из (10.14) и (10.16) имеем

$$U \approx -(\vec{d}_2, \vec{E}_1), \quad (10.19)$$

где \vec{E}_1 – напряженность электрического поля первой системы.

Подставляя выражение (10.9), получаем

$$U \approx \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2)}{R^3} - \frac{3(\vec{d}_1, \vec{R})(\vec{d}_2, \vec{R})}{R^5}, \quad (10.20)$$

где \vec{R} – вектор, задающий положение второй системы относительно первой.

Если же одна из систем имеет полный заряд e , а вторая – нейтральна, то из (10.19) и закона Кулона (9.7) получаем

$$U = -e \frac{(\vec{d}, \vec{R})}{R^3}, \quad (10.21)$$

где \vec{R} – вектор, направленный от диполя к заряду.

ЛЕКЦИЯ 11. Постоянное магнитное поле

11.1. Магнитное поле стационарных токов.

Закон Био-Савара-Лапласа

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое не зависящими от времени (стационарными) электрическими токами. Из-за отсутствия временной зависимости производная по времени в уравнении (7.2) отсутствует и уравнения Максвелла (5.24) и (7.2), определяющие магнитное поле, имеют вид

$$\text{div} \vec{H} = 0, \quad (11.1)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (11.2)$$

Согласно (3.9) векторный потенциал подчиняется уравнению $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, подставляя это в (11.2), имеем

$$\text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

В лекции 3 было показано, что векторный потенциал поля определен неоднозначно: на него можно наложить любое одно дополнительное условие. Удобно выбрать такую калибровку потенциала, при которой

$$\text{div} \vec{A} = 0. \quad (11.3)$$

Тогда уравнение для векторного потенциала приобретает вид

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (11.4)$$

Поскольку уравнение (11.4) при замене \vec{j} на ρ аналогично уравнению Пуассона (9.4), его решение можно записать подобно решению (9.10) уравнения Пуассона:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV, \quad (11.5)$$

где R – расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема dV .
Напряженность поля равна

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{1}{c} \int \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) dV.$$

При вычислении ротора от подынтегрального выражения в этой формуле следует пользоваться известной формулой

$$\text{rot } f\vec{a} = f \text{rot } \vec{a} + [(\text{grad } f), \vec{a}],$$

где f и \vec{a} – любые скаляр и вектор, соответственно.

Следует также учитывать, что при вычислении ротора переменной считается координата точки наблюдения, и поэтому вектор \vec{j} следует считать постоянным

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) = \left[\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right), \vec{a} \right] = \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3}.$$

Тогда с учетом того, что вектор \vec{R} направлен из dV в точку, где определяется магнитное поле, получаем закон Био-Савара-Лапласа

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV. \quad (11.6)$$

11.2. Магнитный момент

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы. Эта задача аналогична мультипольному разложению для электрического поля.

Выберем начало координат в центре системы зарядов и введем те же радиусы векторы \vec{R}_0 и \vec{r}_a , что и в лекции 10 (рис. 2.5). Воспользовавшись аналогичностью этой задачи и задачи о нахождении электрического поля на большом расстоянии от системы зарядов, рассмотренной в лекции 10, запишем окончательные результаты.

Магнитным моментом системы называется величина

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e[\vec{r}, \vec{v}]. \quad (11.7)$$

Магнитное поле на большом расстоянии равно

$$\vec{H} = \frac{3\vec{n}(\vec{m}, \vec{n}) - \vec{m}}{R_0^3}. \quad (11.8)$$

Сравните полученное выражение для магнитного момента (11.7) с выражением для дипольного момента (10.6), а выражение (11.8) – с выражением (10.9) для электрического поля.

Важно, что член нулевого порядка аналогичный (10.4) для электрического поля, в разложении для магнитного поля отсутствует. Это является следствием того факта, что магнитных зарядов не существует, т. е. так называемый монополь Дирака пока не обнаружен.

Любопытно, что если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, в частности, если система состоит из одинаковых частиц, то магнитный момент системы непосредственно выражается через ее механический момент

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \sum m[\vec{r}, \vec{v}] = \frac{e}{2mc} \vec{M}. \quad (11.9)$$

Здесь использовано выражение М(2.8) для механического момента и приближенно верное при $v \ll c$ классическое выражение для импульса $\vec{p} = m\vec{v}$.

Лекция 12. Электромагнитные волны

12.1. Волновое уравнение

Статическое электрическое и магнитное поля, как было показано в лекциях 10 и 11, создаются зарядами и токами. Переменное же электромагнитное поле (зависящее от времени) может существовать в отсутствие поблизости зарядов. Такие поля называют *электромагнитными волнами*.

Электромагнитное поле в вакууме определяется уравнениями Максвелла, в которых нужно положить $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0, \quad (12.1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = 0. \quad (12.2)$$

Выведем уравнение для потенциалов электромагнитных волн. Поскольку на потенциалы в силу их неоднозначности можно наложить одно дополнительное условие, то выберем в качестве его равенство

$$\varphi = 0. \quad (12.3)$$

Тогда выражения (3.8) и (3.9) сводятся к

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (12.4)$$

Подставим эти выражения в первое из уравнений (12.2). Воспользовавшись известным равенством

$$\text{rot rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A},$$

и приняв во внимание то, что для зависящего от времени вектор-потенциала $\text{div } \vec{A} = 0$, а это видно, если подставить \vec{E} из (12.4) во второе из уравнений (12.2), получим

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (12.5)$$

Это уравнение, определяющее вектор-потенциал электромагнитных волн, называется *волновым уравнением* или *уравнением Даламбера*.

Подстановка (12.4) в уравнения (12.1) приводит к тождествам.

Применяя к (12.5) операции rot и $\frac{\partial}{\partial t}$ с учетом (12.4), убеждаемся, что напряженности \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

12.2. Плоские волны

Рассмотрим частный случай волн, при котором поле зависит только от одной координаты (и времени). Такие волны называются *плоскими*. В этом случае волновое уравнение (12.5) имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (12.6)$$

где f – любая компонента векторов \vec{E} или \vec{H} .

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение этого уравнения имеет вид

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (12.7)$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции.

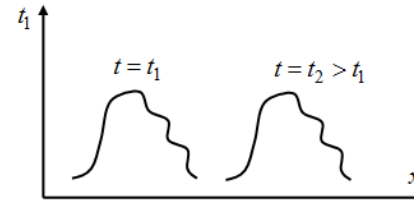


Рисунок 2.7

Значение функции f_1 не меняется при $x = \text{const} + ct$. Значит, эта функция описывает плоскую волну произвольной формы, движущуюся со скоростью c вправо, а f_2 , соответственно, волну, движущуюся влево (рис. 2.7).

Рассмотрим плоскую волну, бегущую вправо ($f_2 = 0$). Все величины в ней являются функциями переменной $t - \frac{x}{c}$. Из (12.4) получаем

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{A}', \quad \vec{H} = -\frac{1}{c} [\vec{n}, \vec{A}'], \quad (12.8)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной $t - \frac{x}{c}$, \vec{n} – орт направления распространения волны (оси x).

Подставляя первое из равенств (12.8) во второе, получаем

$$\vec{H} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (12.9)$$

Из равенства $\text{div } \vec{A} = 0$ следует $A'_x = 0$, откуда, с учетом (12.8), получаем

$$E_x = 0.$$

Из полученных формул следует, что электрическое и магнитное поля плоской волны направлены перпендикулярно к направлению ее распространения. Поэтому электромагнитные волны называют *поперечными*. Более того, как следует из (12.9), поля \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и равны по величине.

Поток энергии (7.6) в плоской волне

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, [\vec{n}, \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n}.$$

При раскрытии двойного векторного произведения использовано, что $(\vec{E}, \vec{n}) = 0$. Используя выражение (7.9) для плотности энергии поля. Запишем

$$\vec{S} = cW\vec{n}. \quad (12.10)$$

Смысл этой формулы весьма прозрачен: энергия плотностью W распространяется со скоростью света c в направлении \vec{n} .

12.3. Монохроматическая плоская волна

Волна, в которой поле является простой периодической функцией времени $\cos(\omega t + \alpha)$, где ω – циклическая частота, называется *монохроматической*. В случае монохроматической плоской волны, распространяющейся вправо, заданной оказывается и зависимость всех величин от координаты (12.7)

$$f \sim \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \beta\right), \quad (12.11)$$

где β не зависит ни от времени, ни от координаты $\left(\alpha = -\frac{\omega x}{c} + \beta\right)$.

Такую зависимость, например, для вектор-потенциала, удобно записывать в виде вещественной части комплексного выражения

$$\vec{A} = \text{Re} \left\{ \vec{A}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} \right\}, \quad (12.12)$$

где \vec{A}_0 – некоторый постоянный комплексный вектор.

Величина $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ есть *длина волны*, а вектор

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (12.13)$$

называется *волновым вектором*. С его помощью (12.12) перепишем в виде, не зависящем от выбора осей координат

$$\vec{A} = \text{Re} \left\{ \vec{A}_0 e^{-i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)} \right\}. \quad (12.14)$$

Если мы производим над величинами только линейные операции, можно опускать знак Re и использовать его только при записи конечных результатов. Так, подставив $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)}$ в (12.4), получим связь между напряженностями и вектор-потенциалом монохроматической плоской волны

$$\vec{E} = ik\vec{A}, \quad \vec{H} = i[\vec{k}, \vec{A}]. \quad (12.15)$$

12.4. Поляризация волны

Рассмотрим изменение со временем поля волны $\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)} \right\}$ в заданной точке пространства при параллельности волнового вектора \vec{k} оси x . Записав y -компоненту поля в виде $E_{0y} = a_1 e^{i\beta_1}$, где a_1 и β_1 – действительные числа, $a_1 > 0$ и подобным же образом E_{0z} через величины a_2 и β_2 , имеем

$$E_y = a_1 \cos(\Phi + \beta_1), \quad E_z = a_2 \cos(\Phi + \beta_2), \quad \Phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t. \quad (12.16)$$

По отношению к величинам E_y и E_z уравнения (12.16) – это уравнение эллипса в параметрической форме относительно параметра Φ с наклонными главными осями. Конец вектора \vec{E} описывает со временем эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Такая волна называется *эллиптически поляризованной* (рис. 2.8).

Повернем систему координат так, чтобы оси y и z стали параллельны главным осям эллипса. В этих осях компоненты поля имеют вид

$$E_y = b_1 \cos(\Phi + \beta), \quad E_z = b_2 \sin(\Phi + \beta).$$

При максимальном значении E_y компонента $E_z = 0$.

Возводя в квадрат и складывая эти уравнения, получим уравнение эллипса в канонической форме

$$\left(\frac{E_y}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{b_2}\right)^2 = 1.$$

Если $|b_1| = |b_2|$, эллипс превращается в окружность. В результате вектор \vec{E} вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят, что *волна поляризована по кругу*. Если при этом $b_1 = b_2$, то вращение происходит по направлению винта, ввинчиваемого вдоль оси x , то имеет место *правая поляризация*, а если $b_2 = -b_1$, то вращение происходит в обратном направлении и имеет место *левая поляризация*.

Если b_2 или b_1 равны нулю, то поле везде и всегда направлено по одной оси. Волну в этом случае называют *линейно* (или *плоско*) *поляризованной*.

На практике часто встречаются волны лишь приближенно монохроматические, их поляризация изменяется со временем. Такие волны называют *частично поляризованными*.

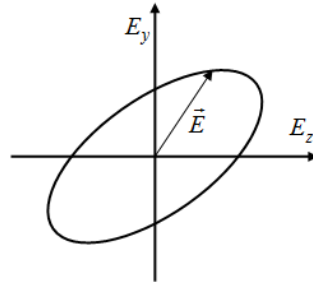


Рисунок 2.8

ЛЕКЦИЯ 13. Распространение света

13.1. Геометрическая оптика

Геометрическая оптика соответствует случаю малых длин волн ($\lambda \rightarrow 0$). Электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, тем не менее можно рассматривать как плоские в каждом небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление распространения волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны. При этом можно ввести понятие *лучей* – линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны. Геометрическая оптика рассматривает распространение волн, в частности, света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь от их волновой природы.

Выведем уравнение, определяющее направление лучей. Пусть f – любая величина, описывающая поле волны. В плоской монохроматической волне (12.16)

$$f = ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)}. \quad (13.1)$$

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \quad (13.2)$$

В случае, когда волна не является плоской, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза ψ , называемая также *эйконалом* (от греч. εἰκὼν – изображение), не имеет простого вида, как в (13.1). Существенно то, что эйконал является большой величиной, что видно из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \rightarrow 0$.

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал можно разложить в ряд, с точностью до членов первого порядка

$$\psi = \psi_0 + \vec{r} \frac{d\psi}{d\vec{r}} + t \frac{d\psi}{dt}.$$

Начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемом участке пространства. Сравнивая это выражение с (13.1), напомним

$$\vec{k} = \frac{d\psi}{d\vec{r}} \equiv \text{grad}\psi, \quad \omega = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (13.3)$$

Из (12.13) $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$. Подставляя сюда (13.3), имеем

$$\left|\frac{d\psi}{d\vec{r}}\right|^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \quad (13.4)$$

Это уравнение эйконала является основным в геометрической оптике.

Из уравнений (13.3) следует замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой частиц. В механике М(4.6) действие S связано импульсом \vec{p} и функцией Гамильтона H частицы соотношением

$$\vec{p} = \frac{dS}{d\vec{r}}, \quad H = -\frac{dS}{dt}.$$

Сравнивая эти соотношения с (13.3), видим, что волновой вектор играет в геометрической оптике роль импульса частицы, частота – роль функции Гамильтона, а эйконал подобен действию. Уравнение эйконала (13.4) – аналог уравнения Гамильтона-Якоби в оптике. Аналогия подтверждается соотношением (2.15) между энергией и импульсом частицы, имеющей нулевую массу покоя $\left(p = \frac{\varepsilon}{c}\right)$ и соотношением $k = \frac{\omega}{c}$.

С учетом указанной аналогии можем сразу записать оптический аналог уравнений Гамильтона М(4.1)

$$\dot{\vec{k}} = -\frac{d\omega}{d\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{d\omega}{d\vec{k}}. \quad (13.5)$$

В вакууме $\omega = kc$ и эти уравнения приводят к очевидным результатам: $\dot{\vec{k}} = 0$, $\dot{\vec{r}} = c\vec{n}$, где \vec{n} – орт направления распространения. Заметим, что эти уравнения верны и при наличии сред.

13.2. Пределы геометрической оптики. Дифракция

Рассмотрим волну, размер которой ограничен в направлении ее распространения (рис. 2.9) Определим, при каком размере волны невозможно определить, какова длина этой волны.

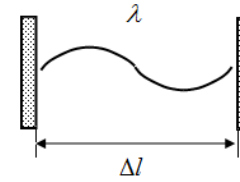


Рисунок 2.9

Очевидно, что если ее размер $\Delta l \ll \lambda$, то о длине волны говорить уже бессмысленно, поскольку длина волны неопределенна. Введем величину неопределенности длины волны $\Delta\lambda$. Понятно, что при $\Delta l \ll \lambda$ неопределенность $\Delta\lambda \gg \lambda$, т. е. когда длину волны нельзя определить, это означает, что неопределенность этой величины больше ее самой, и, следовательно, $\Delta\lambda \approx \lambda$ при $\Delta l \approx \lambda$.

Поскольку волновой вектор \vec{k} непосредственно связан с длиной волны $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ (12.13), то для неопределенности волнового вектора Δk верны те же неравенства

$$\Delta k \gg k \text{ при } \Delta l \ll \lambda, \quad \Delta k \approx k \text{ при } \Delta l \approx \lambda.$$

Последние неравенства можно записать в виде $\Delta k \approx \frac{k\lambda}{\Delta l}$ или, учитывая, что $k\lambda \approx 1$, в виде

$$\Delta l \cdot \Delta k \approx 1. \quad (13.6)$$

Можно показать, что это соотношение верно не только при $\Delta l \leq \lambda$, но и при произвольном соотношении этих величин. Из соотношения

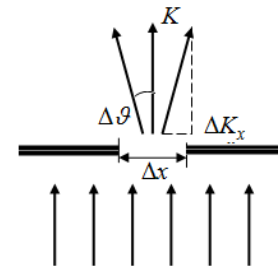


Рисунок 2.10

(13.6) («соотношения неопределенностей») следуют пределы применимости геометрической оптики и степень ее точности.

Пусть световой луч проходит через отверстие в экране шириной Δx (рис. 2.10). При этом неопределенность в x -компоненте его волнового вектора порядка $\frac{1}{\Delta x}$, следовательно, неопределенность в угле распространения луча относительно оси отверстия составляет

$\Delta\vartheta \approx \frac{\Delta k_x}{k}$ (при малых $\Delta\vartheta$ $\sin \Delta\vartheta \approx \Delta\vartheta$) или

$$\Delta\vartheta \approx \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (13.7)$$

Другими словами, степень отклонения луча от прямолинейного распространения, предписываемого геометрической оптикой, тем меньше, чем меньше отношение длины волны λ к размеру отверстия Δx (или преграды на пути распространения луча).

Явления, наблюдающиеся в результате отклонения от геометрической оптики, называют явлениями *дифракции*. Различают *дифракцию Фраунгофера* и Френеля. Первый тип дифракции соответствует случаю, когда падающую на экран с отверстием волну можно считать плоской и при этом рассматривается распределение интенсивности I прошедшего через экран света по углам. Например, если отверстие представляет собой бесконечную щель шириной Δx , то это распределение имеет вид

$$\frac{dI}{d\vartheta} \sim \frac{\sin^2\left(k \frac{\Delta x}{2}\right)}{\vartheta^2}. \quad (13.8)$$

Характерная ширина этого распределения по углу соответствует соотношению (13.7).

Дифракция Френеля – это дифракция света от точечного источника, при которой за отклонения от геометрической оптики ответственные области вблизи краев отверстия, полуплоскости и т. д. (рис. 2.11). Метод нахождения поля волны на значительном расстоянии от экрана состоит в так называемом *принципе Гюйгенса*: каж-

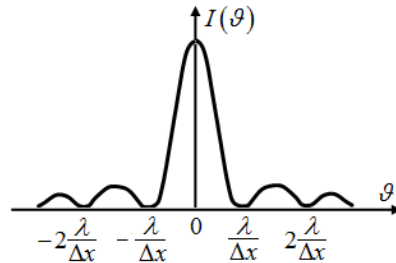


Рисунок 2.11

ждую точку в поле световой волны, которая дошла до плоскости экрана, можно рассматривать как точечный источник света, распространяющегося за экран:

$$f_p = \int \frac{kf}{2\pi i R} e^{ikR} dS, \quad (13.9)$$

где f – любая величина для поля, f_p – в точке наблюдения, R – расстояние от точки на плоскости экрана до точки наблюдения, множитель e^{ikR}/R – волна, дошедшая от вторичного точечного источника на продолжении плоскости экрана до точки наблюдения. Интегрирование ведется по верхней полуплоскости, откуда волны от вторичных источников доходят до наблюдателя.

Анализ выражения (13.9) показывает, что существенный вклад в интеграл дает только область размером порядка $(R_0\lambda)^{\frac{1}{2}}$ вблизи края экрана,

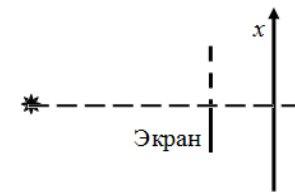


Рисунок 2.12

R_0 – расстояние от точки наблюдения до экрана. Характерное расстояние прохождения света в область геометрической тени порядка $(R_0\lambda)^{\frac{1}{2}}$.

Распределение интенсивности света за экраном (рис. 2.12) схематически изображено на графике рис. 2.13.



Рисунок 2.13

ЛЕКЦИЯ 14. Излучение электромагнитных волн

14.1. Запаздывающие потенциалы

Выведем уравнения поля, создаваемого движущимися зарядами. Для этого нам понадобится четырехмерный вид уравнений Максвелла (7.1).

$$\sum_k \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad (14.1)$$

На четырехмерный вектор потенциал поля вследствие градиентной инвариантности $\left(A'_i \Leftrightarrow A_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ можно наложить одно дополнительное условие, наложим так называемое условие Лоренца

$$\sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0 \quad (14.2)$$

или в трехмерном виде, учитывая, что $A_i = (\vec{A}, i\varphi)$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (14.3)$$

Подставляя в (14.1) определение тензора поля (7.1) и учитывая (14.2), получаем уравнение, которое определяет потенциалы электромагнитного поля A_i

$$\sum_k \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i. \quad (14.4)$$

В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений для \vec{A} и для φ

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (14.5)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (14.6)$$

Когда заряды неподвижны, производная по времени равна нулю. В этом случае поля *постоянны*, и эти уравнения сводятся к уже известным нам уравнениям электростатики, в частности, (14.6) переходит в уравнение Пуассона (9.4), а (14.5) – в соответствующее уравнение для векторного потенциала (11.4). Для переменного поля в отсутствие зарядов и токов при $j = 0$ эти уравнения переходят в однородные уравнения для волн (12.5).

Решим уравнение (14.6) для случая точечного заряда $\rho = e(t) \delta(\vec{R})$, расположенного в начале координат, величину заряда считаем зависящей от времени, \vec{R} – расстояние от начала координат. Везде, кроме начала координат, $\delta(\vec{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (14.7)$$

Очевидно, что решение обладает центральной симметрией, т. е. зависит только от R . Запишем оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)$$

и

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Сделаем подстановку $\varphi = \frac{\chi(R, t)}{R}$ в (14.7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{\frac{\partial \chi}{\partial R} R - \chi}{R^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\frac{\partial \chi}{\partial R} R - \chi}{R^2} \right] = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial \chi}{\partial R} R - \chi \right] = \\ &= \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} R + \frac{\partial \chi}{\partial R} - \frac{\partial \chi}{\partial R} \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2}. \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение относительно χ

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение для плоских волн (12.6), которое мы уже получали. Решение этого уравнения есть (12.7)

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Ограничимся одной из этих функций аналогично тому, как мы это сделали в лекции 12. Положим $f_2 = 0$. Тогда потенциал везде, кроме начала координат имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{R} \chi\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (14.8)$$

где χ – произвольна функция.

Для определения функции χ необходимо рассмотреть уравнение (14.6) вблизи начала координат

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi e \delta(\vec{R}). \quad (14.9)$$

Для этого сравним (14.9) с уравнением (9.11) для потенциала, создаваемого не зависящим от времени зарядом,

$$\Delta \varphi = -4\pi e \delta(\vec{R}),$$

которое приводит к закону Кулона $\varphi = \frac{e}{R}$. Вблизи $R = 0$ эти уравнения эквивалентны: членом с производной по времени в (14.9) можно пренебречь по сравнению с пространственными производными, поскольку последние ведут себя как $1/R^3$. Таким образом, при $R \rightarrow 0$ выражение (14.8) должно иметь вид закона Кулона (для зависящего от времени заряда), откуда следует, что $\chi(t) = e(t)$ и, следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{R} e\left(t - \frac{R}{c}\right).$$

Перейдем от результата для поля, создаваемого точечным зарядом, к полю, создаваемому распределенным зарядом (6.9), и получим

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho}{R} \left(\vec{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV', \quad (14.10)$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ – вектор, указывающий точку, в которой определяется значение потенциала, относительно элемента объема $dV' = dx' dy' dz'$.

Это же выражение можно записать в коротком виде

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV. \quad (14.11)$$

По аналогии, для векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R} dV. \quad (14.12)$$

Выражения (14.11) и (14.12) называются *запаздывающими потенциалами*, поскольку поле в точке наблюдения создается зарядами в предшествующий момент времени, отстоящий от настоящего на время распространения взаимодействия R/c .

14.2. Дипольное излучение

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на расстояниях, больших по сравнению с ее размерами. Пусть \vec{R}_0 – это радиус-вектор, проведенный из начала координат, находящегося внутри системы зарядов, в точку наблюдения поля P , а \vec{n} – единичный вектор в этом же направлении. Расстояние между точкой P и зарядом в элементе объема dV , фигурирующее в формулах (14.11) и (14.12), $R = |\vec{R}_0 - \vec{r}|$, где \vec{r} – радиус-вектор этого элемента объема. На больших расстояниях от системы $R_0 \gg r$ в первом порядке разложения по \vec{r} имеем

$$R = |\vec{R}_0 - \vec{r}| = R_0 - (\vec{r}, \vec{n})$$

В знаменателях подынтегральных выражений (14.11) и (14.12) можно ограничиться нулевым порядком и положить $R = R_0$. В аргументе же

$t - R/c$ этого, вообще говоря, сделать нельзя, поскольку за время $(\vec{r}, \vec{n})/c$ могут существенно меняться заряды и токи.

Найдем дополнительное условие, при котором этими изменениями можно пренебречь. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов меняется заметным образом, а a – порядок величины размеров системы. Тогда необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Частота излучения системы зарядов порядка $1/T$ и, следовательно, $\lambda = cT$ – это длина волны излучения. Следовательно, данное условие можно записать в виде

$$a \ll \lambda. \quad (14.13)$$

Это значит, что размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Если записать $T \approx a/v$, где v – порядок величины скорости зарядов, то данное условие (следующее из $a/c \ll T$), можно переписать и в другом виде

$$v \ll c.$$

И тогда при указанных выше эквивалентных условиях выражение (14.12) для запаздывающего потенциала можно записать в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \int \vec{j}_t' dV, \quad (14.14)$$

где время $t' = t - R_0/c$ уже не зависит от переменных интегрирования.

Подставляя $\vec{j} = \rho \vec{v}$, перепишем это выражение в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e \vec{v}.$$

Суммирование проводится по всем зарядам системы, и все величины справа берутся в момент времени t' .

$$\sum e \vec{v} = \frac{d}{dt} \sum e \vec{r} = \dot{\vec{d}},$$

где \vec{d} – дипольный момент системы.

Тогда

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cR_0}. \quad (14.15)$$

На больших расстояниях от системы поле в малых участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемых ею волн

$$R_0 \gg \lambda. \quad (14.16)$$

Об этой области поля говорят как о *волновой зоне* излучения. В плоской волне, как следует из второго из равенств (12.8) и равенства $\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}]$, которое следует из (12.9) $\vec{H} = [\vec{n}, \vec{E}]$, напряженности полей можно найти через векторный потенциал по формулам

$$\vec{H} = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}}, \vec{n}], \quad \vec{E} = \frac{1}{c} \left[[\dot{\vec{A}}, \vec{n}], \vec{n} \right]. \quad (14.17)$$

Откуда находим, что магнитное поле в волновой зоне равно

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\vec{d}}, \vec{n}]. \quad (14.18)$$

Электрическое поле

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R_0} \left[[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}], \vec{n} \right].$$

Заметим, что в нашем приближении излучение определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется *дипольным*.

Поскольку $\vec{d} = \sum e \vec{r}$, то $\ddot{\vec{d}} = \sum e \ddot{\vec{v}}$. Другими словами, заряды могут излучать только тогда, когда они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают (то же самое следует и из принципа относительности – равномерно движущийся заряд можно рассматривать в инерциальной системе, где он покоится, но тогда он не излучает).

Плотность потока энергии согласно (12.10)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [E, H] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n},$$

$$\vec{S} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi R_0^2 c^3} \sin^2 \vartheta \vec{n}, \quad (14.19)$$

где ϑ – угол между векторами $\ddot{\vec{d}}$ и \vec{n} .

Полная интенсивность, равная полной энергии излучения, проходящего через окружающую систему сферу в единицу времени, равна

$$I = \int \vec{S} d\vec{f} = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3}. \quad (14.20)$$

III. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лекция 1. Необходимость пересмотра представлений классической физики.

Основные принципы квантовой механики

Классическая механика и электродинамика при попытке применить их к объяснению атомных и электронных явлений приводят к результатам, находящимся в резком противоречии с опытом. В модели атома, в которой электроны вращаются вокруг ядра, электроны должны по классическим представлениям излучать электромагнитные волны (см. лекцию 14 ТП) и, теряя энергию, упасть на ядро. Движение по замкнутой орбите – это ускоренное движение. Если ускорение отлично от нуля, то должно быть дипольное излучение. Поскольку излучение уносит энергию, а другого источника для ее восполнения, кроме кинетической энергии движения электрона нет, то в конечном итоге это должно привести к остановке электрона и падению его на ядро. А значит, по представлениям классической физики атом не может быть устойчивым.

Другое яркое противоречие с классической механикой – это явления дифракции электронных пучков при пропускании их через кристалл или через две щели в экране. При этом наблюдается картина чередования минимумов и максимумов интенсивности, аналогичная картине при дифракции электромагнитных волн. Отсюда следует, что поведение материальных частиц – электронов, обнаруживает черты, свойственные волнам.

Если закрыть одну щель (рис. 3.1, а) и пропускать поток электронов, то наблюдается картина интенсивности (числа электронов, попавших в единичную площадку), близкую к естественной по классике. Если открыть вторую щель, а закрыть первую, то наблюдается подобная картина (рис. 3.1, б). При открывании двух щелей (рис. 3.1, в) происходит не простое наложение, а наблюдается дифракционная картина. Получается, что будто проходящий через одну щель электрон «знает», что другой проходит через вторую щель, и, зная это, изменяет свое движение. Все это доказывает, что самые привычные представления необходимо изменять. Что, вероятно, вообще нельзя говорить, что один электрон проходит через одну щель, а другой – через другую.

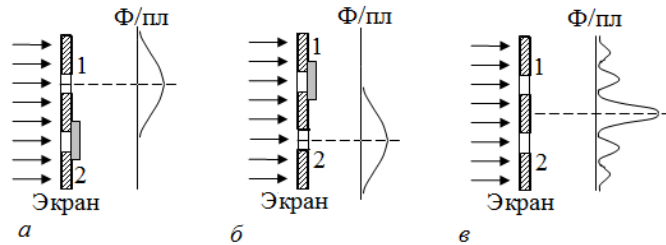


Рисунок 3.1

Подобные вопросы очень волновали физиков начала 20 века, среди которых Планк, Бор, Эйнштейн, де Бройль, Гейзенберг, Шредингер и другие. Они говорили о кризисе в науке и даже о конце науки. Значительный прорыв в понимании вопросов, связанных с поведением микро-частиц, был сделан к 30-м годам XX века, но многое в их свойствах стало выясняться совсем недавно.

Квантовая механика — это механика микрочастиц.

1.1. Принцип неопределенности

В квантовой механике не существует понятия траектории частицы, координаты частицы не могут быть определены с абсолютной точностью. Мы имеем дело с состояниями микрочастиц, в которых некоторые величины или совсем не определены, или определены приближенно. Принцип (или соотношение) неопределенности открыт лауреатом Нобелевской премии 1932 года немецким физиком Вернером Гейзенбергом (1901–1976) в 1927 году.

В квантовой механике состояние частицы (подобно волне) описывается некоторой функцией координат и времени $\psi(q, t)$, вообще говоря, комплексной, где q — совокупность координат. В отличие от компонент электромагнитной волны, для которой комплексную форму записи применяют для удобства, а сами компоненты действительны, ψ -функция является комплексной изначально. Эта ψ -функция называется *волновой функцией* или амплитудой вероятности. Квадрат модуля этой функции определяет распределение вероятностей значений координат: $|\psi|^2 dq$ есть вероятность того, что частица будет обнаружена в элементе про-

странства dq . Поскольку вероятность найти частицу во всем пространстве равна единице, волновая функция подчиняется так называемому *условию нормировки*

$$\int |\psi|^2 dq = 1. \quad (1.1)$$

Если ψ -функцию домножить на $e^{i\alpha}$, где α — любое действительное число, то ни величина вероятности $|\psi|^2 dq$, ни условие нормировки (1.1) не изменятся. Можно показать, что это принципиальная неоднозначность: ψ -функция определена с точностью до любого постоянного множителя $e^{i\alpha}$ — так называемого *фазового множителя*.

1.2. Принцип суперпозиции состояний

Если известна зависимость от времени функции $\psi_1(q, t)$, описывающей некоторое состояние частицы, и функции $\psi_2(q, t)$, описывающей другое ее состояние, то всякая линейная комбинация этих функций, т. е. всякая функция вида $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ (c_1 и c_2 — произвольные постоянные) также описывает возможное состояние и его зависимость от времени. Если в состоянии ψ_1 измерение некоторой физической величины дает определенный результат, а в состоянии ψ_2 — другой результат, то в состоянии, описываемом их линейной комбинацией, измерение этой величины дает с определенной вероятностью либо первое, либо второе значение.

1.3. Предельный переход к классической механике

Геометрическая оптика, имеющая аналогию с классической механикой, справедлива при $\lambda \rightarrow 0$, где λ — длина волны света.

Лауреат Нобелевской премии за 1929 год Луи Де Бройль (1892–1987) в 1924 году высказал предположение, впоследствии подтвержденное, что между частицами и волнами нет принципиальной разницы, и что частице также соответствует некоторая длина волны. При этом, предельный переход от квантовой механики к классической соответствует тому же пределу $\lambda \rightarrow 0$.

Известна следующая аналогия геометрической оптики с механикой: электрическое поле волны может быть записано в виде $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\varsigma}$, где \vec{E}_0 можно считать почти константой, а величина ς – аналог классического действия как функции координат и времени, подчиняется уравнению Гамильтона-Якоби (лекция 2 ТП). Поэтому для этого предельного случая естественно записать

$$\psi = a e^{\frac{iS}{\hbar}}, \quad (1.2)$$

где S – действие, а $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – константа, которая из соображений размерности должна иметь размерность действия (энергия, умноженная на время). Она называется *постоянной Планка* и была введена в 1900 году лауреатом Нобелевской премии 1918 года немецким физиком Максом Планком (1858–1947).

1.4. Математический аппарат квантовой механики

В квантовой механике физическим величинам соответствуют операторы, действующие на волновые функции. Поэтому представим здесь краткий обзор математической теории линейных операторов.

Оператор – это правило, по которому одной функции сопоставляется определенная другая функция. Обозначается следующим образом: $\psi_2 = \hat{L}\psi_1$ и означает, что оператор \hat{L} , действуя на функцию ψ_1 , производит функцию ψ_2 . Оператор называется *линейным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} \hat{L}(\psi_1 + \psi_2) &= \hat{L}\psi_1 + \hat{L}\psi_2, \\ \hat{L}a\psi &= a\hat{L}\psi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где a – произвольная константа.

Из (1.3) следует, как линейный оператор действует на произвольную линейную комбинацию функций:

$$\hat{L}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{L}\psi_1 + c_2\hat{L}\psi_2,$$

Собственной функцией оператора (далее говорим только о линейных операторах) называется такая функция, для которой справедливо равенство

$$\hat{L}\psi = a\psi, \quad (1.4)$$

где a – постоянный множитель, который называется *собственным значением* этого оператора, соответствующим данной собственной функции. То есть оператор для этой функции сводится к умножению функции на определенную константу.

Скалярным произведением функции ψ_1 на функцию ψ_2 называется интеграл

$$\langle 1|2 \rangle = \int \psi_1^* \psi_2 dq. \quad (1.5)$$

В частности, условие нормировки (1.1) для некоторой функции ψ_1 может быть записано в виде $\langle 1|1 \rangle = 1$.

Оператор \hat{B} называют *транспонированным* оператору \hat{A} (обозначается $\hat{B} = \hat{A}^\sim$), если для любых двух функций ψ и φ выполняется равенство

$$\int \psi \hat{B} \varphi dq = \int \varphi \hat{A} \psi dq. \quad (1.6)$$

Оператор \hat{B} называют *комплексно сопряженным* оператору \hat{A} (обозначается $\hat{B} = \hat{A}^*$), если для любой функции φ выполнено равенство

$$(\hat{A}\varphi)^* = \hat{A}^* \varphi^*, \quad (1.7)$$

т.е. комплексное сопряжение с операторами происходит подобно обычным множителям: сопряженное от произведения равно произведению сопряженных.

Оператор транспонированный и комплексно сопряженный данному называется *эрмитовски сопряженным* ему (обозначается $\hat{A}^\sim = \hat{A}^*$). Из определения операций транспонирования и комплексного сопряжения операторов (1.6) и (1.7) ясно, что их можно переставлять местами:

$(\tilde{A})^* = \tilde{A}^*$. Оператор, обладающий свойством $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, называется *эрмитовым или самосопряженным*. Эрмитовы операторы играют большую роль в квантовой механике.

Оператор, соответствующий последовательному действию на функцию двух других операторов, называется их произведением

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi).$$

Вообще говоря, любые два оператора не коммутируют, т. е. $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$. *Великая теорема Гильберта*: набор всех собственных функций любого эрмитового оператора составляет полный набор (систему) функций. Это означает, что любая функция может быть представлена как линейная комбинация функций из этого набора, причем представлена единственным образом. Иными словами, пусть \hat{A} – эрмитовый оператор. Тогда уравнение $\hat{A}\psi = a\psi$, называемое уравнением на собственные функции и собственные значения (1.4), имеет множество решений ψ_n с соответствующими собственными значениями a_n . При этом любая функция φ может быть представлена в виде

$$\varphi = \sum_n c_n \psi_n. \quad (1.8)$$

При этом набор c_n для каждой функции φ вполне определен. Собственные функции подобны ортам для векторов. Вообще функция – это частный случай вектора. При записи (1.8) предполагается, что собственные функции оператора могут быть пронумерованы числами натурального ряда n . Об этом случае говорят как о *дискретном спектре* оператора \hat{A} , но возможно, что собственные функции могут быть систематизированы непрерывным параметром p . Об этом говорят как о непрерывном, сплошном спектре оператора и сумма в (1.8) заменяется интегралом

$$\varphi = \int c_p \psi_p dp. \quad (1.9)$$

ЛЕКЦИЯ 2. Свойства эрмитовых операторов

2.1. Теорема 1

Собственные значения эрмитового оператора действительны, поэтому они играют важную роль в квантовой механике.

Домножим уравнение $\hat{A}\psi = a\psi$ слева скалярно на ψ

$$\langle \psi | \hat{A} \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle$$

и перепишем это равенство с учетом определения скалярного произведения (1.5) и условия нормировки (1.1)

$$\int \psi^* \hat{A} \psi dq = a.$$

Запишем комплексно сопряженное равенство

$$\int \psi \hat{A}^* \psi^* dq = a^*.$$

Воспользовавшись определениями транспонированного оператора (1.6), эрмитовски сопряженного и эрмитового оператора, имеем:

$$a^* = \int \psi^* \hat{\tilde{A}} \psi dq = \int \psi^* \hat{A}^\dagger \psi dq = \int \psi^* \hat{A} \psi dq = a,$$

т. е. $a^* = a$, что и требовалось доказать.

2.2. Теорема 2

Собственные функции эрмитового оператора (ψ_1 и ψ_2), соответствующие различным собственным значениям ($a_1 \neq a_2$), ортогональны между собой, т. е. $\langle 1 | 2 \rangle = 0$.

Рассмотрим величину $\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | a_2 \psi_2 \rangle = a_2 \langle 1 | 2 \rangle$. С другой стороны, $\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \int \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dq = \left(\int \psi_2^* \hat{A}^\dagger \psi_1 dq \right)^* = (a_1 \langle 2 | 1 \rangle)^* = a_1 \langle 1 | 2 \rangle$.

$$a_2 \langle 1 | 2 \rangle = a_1 \langle 1 | 2 \rangle,$$

$$(a_2 - a_1)\langle 1|2\rangle = 0,$$

$$\langle 1|2\rangle = 0.$$

Можно показать, что и собственные функции, соответствующие одинаковым собственным значениям (так называемый случай *вырождения* спектра оператора \hat{A}), также можно сделать ортогональными. Таким образом, все собственные функции эрмитового оператора можно сделать ортогональными между собой и нормированными. О такой системе функций говорят как об *ортонормированном базисе*, по которому в силу теоремы Гильберта можно разложить любую функцию (в полном соответствии с набором ортов в случае векторов).

2.3. Определение коэффициентов разложения функции

Пусть (1.8) – разложение функции по ортонормированному базису. Скалярно умножим слева обе стороны этого равенства на ψ_m

$$\langle \psi_m | \psi \rangle = \sum_n c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = c_m. \quad (2.1)$$

При преобразовании мы использовали, что для ортонормированного базиса $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$, где δ_{mn} – символ Кронекера, который по определению

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Формула (2.1) позволяет вычислять коэффициенты разложения функции ψ .

2.4. Матричная форма представления операторов

Матрицей оператора \hat{A} в ортонормированном базисе ψ_n называется совокупность величин

$$A_{nm} = \int \psi_n^* \hat{A} \psi_m dq = \langle \psi_n | \hat{A} \psi_m \rangle, \quad (2.2)$$

о каждой из которых говорят как о *матричном элементе* данного оператора. Если записывать в привычном для матрицы виде, то первый индекс соответствует номеру строки, а второй – номеру столбца. Задание матрицы оператора полностью определяет его действие на любую функцию.

Действительно, пусть φ – результат действия оператора на функцию ψ , т. е. $\varphi = \hat{A}\psi$. По теореме Гильберта функции φ и ψ можно записать в виде (1.8)

$$\varphi = \sum_n b_n \psi_n, \quad \psi = \sum_m c_m \psi_m,$$

где под ψ_n будем понимать ортонормированный базис.

Тогда из (2.1) имеем

$$b_n = \langle \psi_n | \hat{A}\psi \rangle = \sum_m c_m \langle \psi_n | \hat{A} \psi_m \rangle = \sum_m A_{nm} c_m. \quad (2.3)$$

Таким образом, зная коэффициенты разложения функции ψ и матрицу оператора, мы находим коэффициенты разложения функции $\hat{A}\psi$.

Матрица произведения операторов находится по известному правилу перемножения матриц

$$(\hat{A}\hat{B})_{mn} = \sum_l A_{ml} B_{ln}. \quad (2.4)$$

Легко также проверить, что матрица эрмитово сопряженного оператора

$$(\hat{A}^*)_{mn} = A_{nm}^*. \quad (2.5)$$

Поэтому для эрмитового оператора $A_{nm}^* = A_{mn}$, т. е. матричные элементы эрмитового оператора, расположенные симметрично относительно диагонали матрицы, комплексно сопряжены друг другу, а диагональные матричные элементы A_{nn} – действительны.

Матрица эрмитового оператора в базисе из своих собственных функций (в собственном базисе) диагональна, т. е. отличными от нуля являются только диагональные матричные элементы

$$A_{nn} = a_n \delta_{nn},$$

где a_n – собственные значения оператора \hat{A} .

В этом можно убедиться, домножив уравнение (1.4), определяющее собственные функции оператора $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$, слева скалярно на ψ_m и учтя ортонормированность базиса $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$.

Верно и обратное утверждение: базис, в котором матрица оператора диагональна, является собственным для этого оператора.

Из теоремы Гильберта непосредственно следует, что для любого эрмитова оператора существует базис, в котором его матрица диагональна.

Если матрицы двух операторов диагональны в одном базисе, т. е. он является собственным для обоих, то эти операторы коммутируют: $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$. В этом легко убедиться из правила умножения (2.4). Верно и обратное: если два оператора коммутируют, то существует такой базис, в котором оба они диагональны.

ЛЕКЦИЯ 3. Операторы основных физических величин

3.1. Принцип соответствия. Вероятность

В квантовой механике физическим величинам (координата, импульс, момент импульса, энергия и пр.) соответствуют эрмитовы операторы. Согласно *принципу соответствия* между операторами величин имеют место те же соотношения, что и между самими этими величинами в классической механике.

Пусть некоторой физической величине соответствует оператор \hat{A} . Точные значения эта величина имеет только в состояниях квазичастицы, собственных по отношению к этому оператору. Это означает, что с максимальной точностью значения этой величины могут быть измерены только в этих состояниях. Если ψ_n – набор собственных функций оператора \hat{A} , т. е. $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$, то в каждом n -ом состоянии данная физическая величина имеет значение a_n . В произвольном состоянии ψ можно говорить о среднем значении этой физической величины

$$\bar{A} = \int \psi^* \hat{A} \psi dq = \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle. \quad (3.1)$$

\bar{A} – это среднее значение, которое получено при многократном измерении этой величины в данном состоянии. Легко убедиться, что при

$\psi = \psi_n$, $\bar{A} = a_n$. Как следует из принципа суперпозиции, описанного в предыдущей лекции, при каждом измерении получается одно из значений величины a_n . При этом появляться оно будет с вероятностью

$$w(a_n) = |c_n|^2, \quad (3.2)$$

где c_n – коэффициент разложения состояния ψ по собственному базису оператора \hat{A} : $\psi = \sum_n c_n \psi_n$. Вообще, $|c_n|^2$ – это вероятность найти состояние ψ_n в состоянии ψ . Отсюда следует, что

$$\sum_n |c_n|^2 = 1. \quad (3.3)$$

В случае непрерывного спектра оператора \hat{A} суммы заменяются интегралами и вместо (3.2) для вероятности найти значение величины в интервале da_p имеем

$$dw(a_p) = |c_p|^2 dp. \quad (3.4)$$

3.2. Оператор импульса

В классической механике сохранение импульса следовало из однородности пространства, т. е. из инвариантности уравнений движения относительно смещения системы в пространстве как целого. При выводе выражения для импульса рассматривалось бесконечно малое смещение. При таком смещении любая функция ψ получает приращение

$$d\psi = \vec{\varepsilon} \nabla \psi,$$

где $\vec{\varepsilon}$ – бесконечно малое смещение.

Поэтому естественно предположить, что оператор импульса пропорционален оператору ∇ . Чтобы проверить это предположение и найти коэффициент пропорциональности, подействуем этим оператором на волновую функцию (1.2)

$$\nabla \psi = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \psi.$$

Согласно (М4.6) $\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \vec{p}$. Следовательно, оператор импульса частицы есть

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla \quad (3.5)$$

или в компонентах

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.6)$$

Нетрудно проверить, что импульс является эрмитовым оператором.

Найдем собственные функции и собственные значения операторов компонент импульса. Они определяются уравнениями

$$p_x \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad p_y \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad p_z \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Эти уравнения имеют общее решение (плоская волна)

$$\psi = C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r})}, \quad (3.8)$$

где C – постоянная, $(\vec{p}\vec{r}) = p_x x + p_y y + p_z z$.

Таким образом, собственные значения операторов проекций импульса образуют непрерывный спектр, поскольку величины p_x , p_y и p_z могут принимать любые значения на числовой оси. В состояниях частицы с волновой функцией (3.8) все три компоненты импульса имеют определенное значение. В соответствии с теоремой Гильберта функции (3.8) со всевозможными значениями \vec{p} представляют собой полный набор функций. По ним может быть разложена любая другая функция аналогично (1.9). В трехмерном случае $\varphi = \int c_p e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r})} d^3 p$ представляет собой разложение в интеграл Фурье.

Как видно из (3.8), период плоской волны

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (3.9)$$

Это *длина волны де Бройля* микрочастицы с импульсом \vec{p} , которая проявляется в экспериментах по дифракции электронов. Классический предел $\lambda \rightarrow 0$ можно рассматривать и как предел $\hbar \rightarrow 0$.

3.3. Оператор координаты

Очевидно, что координата x частицы определена точно в состоянии, волновая функция которого

$$\psi_{x_0} = \delta(x - x_0). \quad (3.10)$$

Именно в этом состоянии ее координата равна точно x_0 . Таким образом, функции (3.10) с различными значениями x_0 являются собственными функциями оператора координаты x , а числа x_0 – соответствующими собственными значениями. Легко проверить, что функции (3.10) являются собственными функциями оператора умножения на x . Действительно, в этом случае уравнение на собственные функции (1.4)

$$x\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0)$$

справедливо, поскольку δ -функция не равна нулю только при $x = x_0$. Таким образом, оператор координаты x

$$\hat{x} = x. \quad (3.11)$$

Это означает, что $\hat{x}\psi = x\psi$, где ψ – произвольная функция.

Аналогично и для других компонент радиус-вектора \vec{r} частицы

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r}. \quad (3.12)$$

Все вышеприведенные соображения справедливы и для любой физической величины, являющейся функцией координаты, поэтому

$$\hat{f}(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad (3.13)$$

где $f(\vec{r})$ – произвольная функция.

Поскольку собственные значения x_0 ничем не ограничены, их спектр непрерывен.

3.4. Соотношения неопределенности

Принцип неопределенности, описанный в лекции 1, подтверждается уже формулой (3.8): в состояниях, в которых полностью определен импульс частицы, ее координата полностью не определена. Это означает, что вероятность $|\psi|^2 dx$ обнаружить частицу в интервале dx не зависит от x , т. е. ее равновероятно обнаружить в любой точке пространства. С другой стороны, в состояниях (3.10) с полностью определенной координатой полностью не определен импульс частицы. В этом смысле говорят о *принципе дополнительности*: в одном и том же состоянии невозможно одновременно точно знать координату и импульс, являющимися так называемыми дополнительными величинами.

Можно установить общее соотношение между неопределенностями координаты и импульса. Оно уже, фактически, установлено нами в теории электромагнитных волн: соотношение между неопределенностью волнового числа и области Δx , в которую помещена волна, гласит (ТП13.6) $\Delta x \Delta k_x \approx 1$. Поскольку Δx – это и есть неопределенность в координате x частицы-волны, а из выражения для длины волны де Бройля (3.9) $\Delta k \approx \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) \approx \frac{\Delta p}{\hbar}$, то

$$\Delta p_x \Delta x \approx \hbar, \quad \Delta p_y \Delta y \approx \hbar, \quad \Delta p_z \Delta z \approx \hbar. \quad (3.14)$$

Как упоминалось в лекции 2, если два оператора не имеют одинакового набора собственных функций (одного и того же собственного базиса), то они не коммутируют. В соответствии с этим утверждением операторы одинаковых проекций импульса и координаты не коммутируют и из (3.6) и (3.12) непосредственно следует

$$\hat{p}_i x_k - x_k \hat{p}_i = -i\hbar \delta_{ik}, \quad (3.15)$$

где $i, k = x, y, z$.

Иными словами, физические величины, операторы которых не коммутируют, являются дополнительными друг к другу.

Лекция 4. Уравнение Шредингера и простейшие задачи квантовой механики

4.1. Волновое уравнение. Уравнение Шредингера

Утверждение, сделанное в лекции 1, что волновая функция Ψ полностью описывает состояние системы в квантовой механике, означает, в частности, что ее задание в некоторый момент времени позволяет определить ее и в последующие моменты. Наиболее простое уравнение, связывающее значения функции в бесконечно близкие моменты времени, имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{L} \Psi, \quad (4.1)$$

где Ψ – зависящая от времени волновая функция, \hat{L} – неизвестный пока оператор, при этом изменение функции со временем с помощью определенного оператора выражается через ее значение в данный момент. Чтобы выяснить, какой классической величине соответствует оператор \hat{L} , подставим в это уравнение предельный при переходе к классике вид волновой функции (1.2). Поскольку медленную зависимость коэффициента a от времени можно не учитывать, получим

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \Psi = \hat{L} \Psi.$$

Но в классической механике $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$ (ТП2.11), где H – функция

Гамильтона. Отсюда следует, что оператору $i\hbar \hat{L}$ в классической механике соответствует функция Гамильтона. В этой связи данный оператор называют *гамильтонианом* и обозначают \hat{H} . Подставляя выражение $\hat{H} = i\hbar \hat{L}$ в (4.1), имеем

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (4.2)$$

Данное уравнение, определяющее зависимость волновой функции от времени, называется *волновым уравнением*.

Согласно принципу соответствия между гамильтонианом и оператором импульса должно существовать то же соотношение, что и в классической механике между функцией Гамильтона, импульсом и координатой. Функция Гамильтона – это энергия, выраженная через импульс и координату (лекция 2 ТП), поэтому в случае одной частицы имеем

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}), \quad (4.3)$$

где $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия, первое слагаемое имеет смысл оператора кинетической энергии, Δ – оператор Лапласа.

При наличии многих частиц уравнение (4.3) принимает вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_a \frac{\Delta_a}{m_a} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots). \quad (4.4)$$

Подстановка (4.3) в волновое уравнение (4.2) приводит к так называемому зависящему от времени или *временному уравнению Шредингера*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{r}) \Psi. \quad (4.5)$$

Собственные функции гамильтониана – это те состояния, в которых энергия системы имеет определенное значение. Если в данное уравнение на собственные функции $\hat{H}\psi = E\psi$, где E – собственные значения энергии, подставить (4.1), то получим

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + [E - U(\vec{r})] \psi = 0. \quad (4.6)$$

Это *стационарное уравнение Шредингера*, а его решения – *стационарные состояния* системы. Легко проверить, что уравнению (4.2) удовлетворяют волновые функции

$$\Psi = \psi e^{-\frac{iEt}{\hbar}}, \quad (4.7)$$

где ψ – стационарное состояние. Таким образом, решение задачи квантовой механики (для одной частицы) сводится к решению уравнения Шредингера (4.6).

Уравнение (4.6), играющее в квантовой механике такую же важную роль, как уравнение второго закона Ньютона в классической механике, было установлено австрийским физиком, лауреатом Нобелевской премии 1933 г. Эрвином Шредингером (1887–1961) в 1926 году.

Как было отмечено ранее, стационарное состояние микрочастицы во внешнем поле, не зависящем от времени, определяется стационарным уравнением Шредингера

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (4.8)$$

где E – энергия частицы в данном состоянии.

Если подставить выражение (4.3) для гамильтониана \hat{H} , то получим уравнение Шредингера в следующей форме (4.6)

Удовлетворяющая временному уравнению Шредингера (4.5) полная волновая функция стационарного состояния Ψ определяется формулой (4.7).

Из формулы (3.1) для среднего значения любой физической величины A для стационарного состояния следует

$$\underline{A} = \int \Psi^* \hat{A} \Psi d^3r = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3r. \quad (4.9)$$

Независящий от координат множитель $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ проносится через оператор \hat{A} , действующий на функцию координат, и уничтожается с множителем

$$\left(e^{\frac{iEt}{\hbar}} \right)^* = e^{\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (4.10)$$

Следовательно, для определения всех физических величин в стационарном состоянии достаточно знать независящую от времени функцию ψ .

Из (4.9) также следует, что средние значения величин в стационарном состоянии не зависят от времени, отсюда и происходит название этих состояний.

4.2. Свободная частица

Если внешнее поле отсутствует $U(\vec{r})=0$, то легко проверить, что решениями уравнения (4.6) являются собственные функции (3.8) оператора импульса – плоские волны, причем,

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (4.11)$$

Таким образом, в найденном стационарном состоянии у свободной частицы полностью определены две величины: энергия и импульс. Это обстоятельство соответствует утверждению из лекции 2, что, если два оператора коммутируют, то они имеют общий базис собственных функций. То, что операторы $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ и $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ коммутируют, ясно из того, что $\Delta = \nabla^2$.

Каждое из собственных значений энергии E бесконечно кратно вырождено (о случае вырождения см. в лекции 2), поскольку одному значению энергии, кроме $E=0$, соответствует бесконечное число собственных функций (3.8), отличающихся направлением вектора \vec{p} .

4.3. Потенциальный ящик

Рассмотрим одномерное (зависящее только от одной координаты) движение частицы в поле, потенциальная энергия частицы в котором изображена на рис. 3.2. В области $0 < x < a$ уравнение Шредингера имеет вид

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0, \quad (4.12)$$

а в областях вне ямы

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0. \quad (4.13)$$

Пусть $E < U_0$. В классической механике частица не может выходить при этом за пределы ямы, поскольку кинетическая энергия

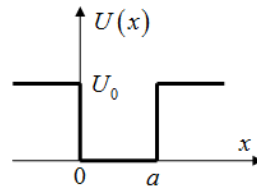


Рисунок 3.2

не может быть отрицательной: $\frac{p^2}{2m} + U_0 = E$.

Решение уравнения (4.13)

$$\psi = C e^{\pm \kappa x}, \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (4.14)$$

Причем из физически очевидного условия конечности пси-функции при $x \rightarrow \pm\infty$ следует выбрать знак «+» слева от ямы и знак «-» справа. Таким образом, в квантовой механике частица может находиться в классически запрещенной области, но вероятность найти в этой области убывает экспоненциально по мере продвижения вглубь области.

Общее решение уравнения (4.12) внутри ямы имеет вид

$$\psi = D \sin(kx + b), \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad (4.15)$$

где D и b – произвольные константы.

Чтобы получить единое для всех x решение задачи, необходимо «сшить» решения (4.14) и (4.15), т. е. приравнять друг другу значения функций ψ справа и слева точек $x=0$ и $x=a$, а также значения производных ψ' . Но мы упростим задачу: будем считать края ямы бесконечно высокими: $U_0 \rightarrow \infty$. Тогда очевидно, что за границу ямы частица проникнуть не может, т. е. имеет место условие

$$\psi(0) = \psi(a) = 0. \quad (4.16)$$

Решение (4.15) удовлетворяет этим условиям только при следующих значениях констант $b=0$ и $k = \frac{\pi n}{a}$, откуда

$$E_n = \frac{(\pi\hbar)^2}{2ma^2} n^2, \quad n=1,2,3,\dots \quad (4.17)$$

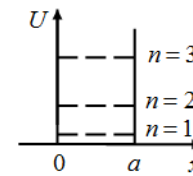


Рисунок 3.3

Из этого следует, что для частицы в яме имеет место *квантование энергии*, т. е. формула (4.17) определяет допустимые значения (уровни) энергии (рис. 3.3). Энергетический спектр в данном случае

дискретный, невырожденный. Спектр является дискретным всегда, когда область движения ограничена.

Нормированная волновая функция имеет вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}. \quad (4.18)$$

Плотность вероятности нахождения частицы содержит узлы $|\psi|^2 = 0$ и пучности.

Легко проверить, что в случае трехмерного потенциального ящика с бесконечно высокими стенками и с размерами a , b и c по трем направлениям решение имеет вид

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{(\pi \hbar)^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right),$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \cdot \sin \frac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n_2 y}{b} \cdot \sin \frac{\pi n_3 z}{c}.$$

4.4. Линейный осциллятор

Одномерные гармонические колебания частицы (линейного осциллятора) – это движение в потенциале $U(x) = \frac{\alpha x^2}{2}$. Если учесть, что в классической физике частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, где m – масса частицы, то гамильтониан линейного осциллятора можно записать в виде

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right). \quad (4.19)$$

Здесь введены операторы

$$b = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} (\hat{p} - i\omega m x) \quad (4.20)$$

и эрмитово сопряженный ему

$$b^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} (\hat{p} + i\omega m x). \quad (4.21)$$

При преобразовании использовано коммутационное соотношение между координатой и импульсом (3.15). Из этого же соотношения непосредственно следует соотношение коммутации между операторами b и b^\dagger

$$bb^\dagger - b^\dagger b = 1. \quad (4.22)$$

Для определения уровней энергии осциллятора мы не будем решать уравнение Шредингера, а воспользуемся матричным методом, предложенным в 1925 году немецким физиком, лауреатом Нобелевской премии 1932 г. Вернером Гейзенбергом (1901–1976).

Умножив равенство (4.22) справа на b ($bb^\dagger b - b^\dagger bb = b$) и воспользовавшись (4.19), получим

$$b\hat{H} - \hat{H}b = \hbar\omega b \quad (4.23)$$

и запишем это соотношение коммутации в матричной форме в базисе собственных функций гамильтониана

$$\hbar\omega b_{ik} = \sum_l (b_{il} H_{lk} - H_{il} b_{lk}) = (E_k - E_i) b_{ik}. \quad (4.24)$$

Мы воспользовались тем, что, как отмечено в лекции 2, оператор в собственном базисе диагонален, т. е. $H_{lk} = E_k \delta_{lk}$. Равенство (4.24) можно переписать в форме $(E_k - E_i - \hbar\omega) b_{ik} = 0$. Из него следует, что матричный элемент b_{ik} отличен от нуля только для тех состояний i и k , для которых $E_k - E_i - \hbar\omega = 0$. Отсюда ясно, что уровни энергии осциллятора отличаются на величину $\hbar\omega$, что, в свою очередь, является квантом энергии гармонических колебаний. Предположив, что уровни i и k являются ближайшими по энергии, запишем ненулевые матричные элементы в виде $b_{n-1,n} = \beta_n$. Низший энергетический уровень осциллятора естественно нумеровать числом $n=0$, поэтому $\beta_0 = 0$, поскольку уровня $n-1$ не существует. Из сказанного следует, что собственные значения энергии осциллятора (энергия его стационарных состояний) есть

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.25)$$

Действительно, поскольку уровни энергии должны отличаться на $\hbar\omega$, то собственные значения оператора $b^\dagger b$ обязаны быть равны $n + \gamma$ (4.19), но постоянная $\gamma = 0$, поскольку $\beta_0 = 0$.

Энергия низшего состояния, как следует из (4.25), не равна нулю, и называется энергией *нулевых колебаний*. Она возникает оттого, что в силу принципа неопределенности частица не может находиться точно в начале координат (рис. 3.4, а).

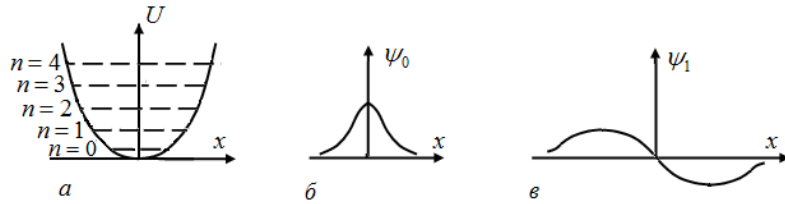


Рисунок 3.4

Волновая функция осциллятора выражается через так называемые полиномы Эрмита (рис. 3.4, б, для $n=0$ и рис. 3.4, в для $n=1$). Число узлов равно номеру состояния, считая нижнее состояние нулевым. Это общее правило для одномерного случая.

ЛЕКЦИЯ 5. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Коэффициенты прохождения и отражения. Туннельный эффект

5.1. Задача о прохождении частицы через потенциальный барьер

Рассмотрим задачу о прохождении частицы через потенциальный барьер (рис. 3.5, а), которая является классической задачей квантовой механики. Предположим, что справа от потенциального барьера (или потенциальной ямы) находится область с постоянным потенциалом U_1 , а слева – другим постоянным потенциалом U_2 . В этих областях на частицу не действует сила. В классической механике, если энергия частицы меньше высоты барьера U_{\max} , то частица, движущаяся слева направо,

не пройдет барьер и в точке остановки повернет налево, поскольку она не может находиться там, где ее энергия меньше потенциальной:

$E = U + T$, где $T = \frac{mv^2}{2}$. Если же энергия частицы больше потенциальной, то частица пройдет барьер и уйдет направо. В квантовой механике, поскольку тут можно говорить только о средних значениях потенциальной и кинетической энергий при заданной полной энергии, частица всегда имеет некоторую вероятность D пройти барьер при $E > U_2$ и некоторую вероятность R отразиться от барьера.

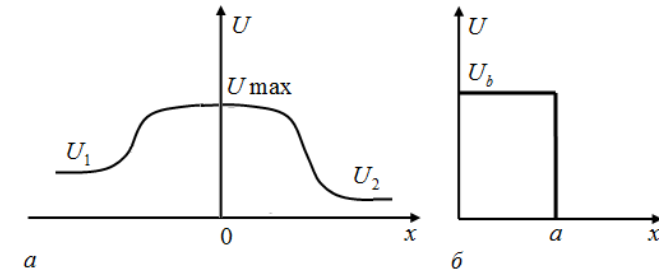


Рисунок 3.5

Рассмотрим самую простую задачу на прохождение. Пусть $U_1 = U_2 = 0$, а в барьере шириной a потенциал имеет также постоянное значение U_b (рис. 3.5, б). Выберем начало координат в начале барьера. Слева от барьера имеем свободную частицу (3.8), (4.11), поэтому волновая функция частицы при $x < a$ имеет вид суперпозиции двух волн: налетающей слева на барьер с импульсом p и отраженной от барьера с импульсом $-p$.

$$\psi = e^{\frac{ipx}{\hbar}} + re^{-\frac{px}{\hbar}}. \quad (5.1)$$

Поскольку общий множитель у ψ -функции может быть выбран произвольно, то множитель перед первой экспонентой выберем равным 1.

Справа от барьера при $x > a$ также имеем свободную частицу с энергией $E = \frac{p^2}{2m}$. Ее волновая функция

$$\psi = de^{\frac{ipx}{\hbar}}, \quad (5.2)$$

Поскольку мы полагаем, что частица налетает на барьер слева, то в (5.2) отсутствует волна с импульсом $-p$.

В области барьера ($0 < x < a$) волновая функция

$$\psi = be^{\frac{i\kappa x}{\hbar}} + ce^{-\frac{i\kappa x}{\hbar}}. \quad (5.3)$$

Импульс частицы κ определяется из условия $E = U_b + \frac{\kappa^2}{2m}$, т. к. полная энергия должна быть во всех точках одинакова. Из этого условия следует, что κ действительно при $E > U_b$ и $\kappa = i\gamma$, где γ действительно при $E < U_b$.

5.2. Коэффициенты прохождения и отражения

Уравнение Шредингера является дифференциальным уравнением 2-го порядка для функции ψ . Из теории дифференциальных уравнений известно, что удовлетворяющая такому уравнению функция и ее первые производные непрерывны (независимо от прерывности коэффициентов в этом уравнении). Чтобы реализовать непрерывность, мы должны приравнять («сшить») значения ψ и ψ' слева и справа от точек $x = 0$ и $x = a$.

$$1 + r = b + c, \quad be^{\frac{i\kappa a}{\hbar}} + ce^{-\frac{i\kappa a}{\hbar}} = de^{\frac{ipa}{\hbar}} \quad \text{— сшивка в точках } x = 0, a$$

$$p(1 - r) = \kappa(b - c), \quad \kappa \left(be^{\frac{i\kappa a}{\hbar}} - ce^{-\frac{i\kappa a}{\hbar}} \right) = pde^{\frac{ipa}{\hbar}} \quad \text{— сшивка производных.}$$

Из этих четырех уравнений мы можем определить четыре неизвестных коэффициента r , d , b и c в формулах (5.1) – (5.2).

Результат для $D = |d|^2$ имеет вид:

$$\text{при } E > U_b \quad D = \frac{4p^2\kappa^2}{(p^2 - \kappa^2)^2 \sin^2 \frac{a\kappa}{\hbar} + 4p^2\kappa^2},$$

$$\text{при } E < U_b \quad D = \frac{4p^2\gamma^2}{(p^2 + \gamma^2)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{a\gamma}{\hbar} + 4p^2\gamma^2}. \quad (5.4)$$

Коэффициент прохождения частицы через барьер D есть отношение вероятности $|\psi|^2 dx$ найти частицу в интервале dx за барьером к вероятности найти ее в интервале той же величины в налетающей на барьер волне. Коэффициент отражения $R = |r|^2$. Из решения уравнений «сшивки» следует равенство: $D + R = 1$. Оно отражает тот факт, что у частицы есть только две возможности: пройти барьер или отразиться.

Проанализируем выражения (5.4). Если высота барьера достаточно велика $U_b \gg E$ и $a\gamma \gg 1$, то $D \approx \frac{16E}{U_b} e^{-\frac{2a\gamma}{\hbar}}$, т. е. коэффициент прохождения экспоненциально мал в случае, когда по классической механике прохождение совершенно невозможно. Допускаемое квантовой механикой прохождение частицы через барьер, превышающий ее энергию, называется явлением *туннелирования*.

При $U_b = 0$ коэффициент прохождения $D = 1$. Интересно, что $D = 1$ и при наличии барьера ($E > U_b$) при $a\kappa = \pi\hbar$. В этом случае имеет место явление *селективной прозрачности* барьера, которое отражает волновые свойства частицы. Любопытно, что отражение возможно не только от барьера, но и от ямы ($D < 1$ при $U_b < 0$, $a\kappa \neq \pi\hbar$).

ЛЕКЦИЯ 6. Момент импульса и систематика состояний водородоподобного атома

6.1. Момент импульса

Момент импульса частицы в классической механике (М2.7)

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (6.1)$$

Согласно принципу соответствия это же соотношение справедливо для операторов момента, координаты и импульса. В квантовой механике момент обычно измеряют в единицах постоянной Планка \hbar . И определенный таким образом момент обозначают буквой \vec{l} : $\vec{M} = \hbar \vec{l}$.

Из (6.1) имеем

$$\begin{aligned}\hbar\hat{l}_x &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \\ \hbar\hat{l}_y &= z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \\ \hbar\hat{l}_z &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Простая проверка с использованием выражения (3.5) для оператора импульса показывает, что различные компоненты оператора момента не коммутируют между собой

$$\begin{aligned}\{\hat{l}_y, \hat{l}_z\} &= i\hat{l}_x, \\ \{\hat{l}_z, \hat{l}_x\} &= i\hat{l}_y, \\ \{\hat{l}_x, \hat{l}_y\} &= i\hat{l}_z.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Здесь и дальше введено обозначение «коммутатора» двух операторов в виде $\{\hat{a}, \hat{b}\} \equiv \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$. Это означает, что разные компоненты вектора момента не могут быть одновременно однозначно определены: если в квантовом состоянии точно определена одна из компонент, то в отношении двух других можно говорить только об их средних значениях.

Как нетрудно проверить, оператор квадрата импульса \hat{l}^2 коммутирует с операторами компонент импульса $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$. Таким образом, квадрат момента (его абсолютная величина) может иметь определенное значение одновременно с одной из его компонент.

Выпишем выражения для операторов \hat{l}_z и \hat{l}^2 в сферических координатах

$$\hat{l}_z = i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (6.4)$$

$$\hat{l}^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (6.5)$$

Найдем собственные функции и собственные значения оператора \hat{l}_z , т. е. найдем решения уравнения $\hat{l}_z \psi = m\psi$ (собственные значения этого оператора принято обозначать буквой m). С учетом (6.4)

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi = m\psi. \quad (6.6)$$

Откуда следует

$$\psi_m = f(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad (6.7)$$

где f – произвольная функция переменных r и θ .

При изменении переменной φ на величину 2π положение точки в пространстве не меняется, поэтому функция ψ_m должна не меняться при замене φ на $\varphi + 2\pi$, т. е. должно быть выполнено условие $e^{2\pi im} = 1$. Отсюда следует, что собственные значения проекции момента m – целые положительные или отрицательные числа.

Собственные значения l^2 оператора квадрата момента \hat{l}^2 равны

$$l^2 = l(l+1), \quad (6.8)$$

где l – целые положительные числа, причем при заданном значении l число m может принимать только следующие значения

$$m = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l, \quad (6.9)$$

т. е. всего $2l+1$ значений. Ограничение значений проекции момента на некоторую ось при заданной абсолютной величине момента – очевидный и в классической физике факт.

Таким образом, допустимые значения величины и проекции момента квантуются, т. е. образуют дискретный ряд.

Зависимость от углов φ и θ волновой функции состояния, в котором одновременно заданы абсолютная величина и проекция момента, полностью задается заданием чисел l и m , называемых *орбитальным* (азимутальным) и *магнитным квантовыми числами*, соответственно.

6.2. Систематика состояний водородоподобного атома

Ранее мы установили, что абсолютная величина момента количества движения и проекция момента на какую-либо ось могут одновременно иметь определенное значение, причем величина момента задается орбитальным квантовым числом l , а проекция – магнитным квантовым чис-

лом m . Эти две физические величины в стационарном состоянии могут иметь определенные значения одновременно с энергией, если потенциал является центральносимметричным $U(\vec{r}) = U(r)$.

Действительно, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$, где m – масса частицы. Оператор \hat{p}^2 пропорционален оператору Лапласа Δ (3.5). В сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]$$

он коммутирует, как нетрудно убедиться из (6.4) и (6.5), с операторами \hat{l}_z и \hat{l}^2 (последний с точностью до множителя просто совпадает с угловой частью оператора Δ). Оператор центральносимметричного потенциала $U(r)$ также коммутирует с этими двумя операторами, поскольку они содержат производные только по углам.

Таким образом, для частицы, находящейся в центральносимметричном потенциале, в частности, для электрона в поле ядра атома с зарядом Ze

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (6.10)$$

могут быть одновременно определены энергия, момент и его проекция. Поскольку область движения электрона в атоме ограничена, его энергия квантуется. Это показал датский физик, лауреат Нобелевской премии 1922 г. Нильс Бор (1885–1962) в 1913 году.

$$E = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad (6.11)$$

где n – главное квантовое число.

При заданном значении n число l может принимать n следующих значений

$$l = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.12)$$

Таким образом, разрешенные значения энергии не зависят от чисел l и m , следовательно, имеет место вырождение по этим числам. Вырож-

дение по m физически понятно. Оно имеет место в любом центральносимметричном потенциале: при фиксированной величине момента энергии не зависит от наклона вектора момента, т. е. наклона плоскости орбиты электрона к оси z . Число l определяет вытянутость (эллипсность) орбиты электрона. Вырождение по l называют *случайным*, оно характерно только для потенциала вида $1/r$.

6.3. Спин. Принцип Паули

В 1927 г. лауреат Нобелевской премии 1945 г. Вольфганг Паули (1900–1958) обосновал идею о существовании у микрочастиц дополнительных квантовых чисел, которые соответствуют «внутреннему» моменту частицы, как если бы частица вращалась вокруг собственной оси. Этот «внутренний» момент количества движения называют *спином* частицы. Соответствующее спину квантовое число s аналогично числу l , квадрат «внутреннего» момента s^2 выражается через это число аналогично формуле (6.8)

$$s^2 = s(s+1). \quad (6.13)$$

Квантовое число σ аналогично числу m . Этому числу равна проекция «внутреннего» момента на выбранную ось. Справедлива также формула типа (6.9)

$$\sigma = -s, -s+1, -s+2, \dots, s-2, s-1, s. \quad (6.14)$$

Но аналогия с вращением вокруг собственной оси не является полной: числа s могут быть не только целыми

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (6.15)$$

Представлению о вращении вокруг оси не соответствует также отношение магнитного и механическим моментам частицы: для спина электрона это соотношение оказывается вдвое большим, чем это следует из классической электродинамики (лекция 11 ТП).

Каждому типу микрочастиц соответствует свое фиксированное значение спина. Для электрона $s = \frac{1}{2}$ и, как следует из (6.13), проекция его

спина на какую-либо ось может принимать только 2 значения: $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

Частицы с полуцелым спином называются *фермионами*, с целым – *бозонами*, поскольку первые подчиняются статистике Ферми-Дирака, а вторые – статистике Бозе-Эйнштейна.

Принцип Паули: в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного фермиона, при этом квантовое состояние определяется всеми квантовыми числами, для атома n, l, m, σ . Этот принцип приводит к существенному различию свойств фермионов и бозонов.

С учетом того, что квантовые числа n, l, m, σ полностью определяют состояние электрона в атоме, а также, учитывая (6.12), (6.9) и два возможных значения числа σ , приходим к выводу, что каждый энергетический уровень, определяемый по (6.11) только числом n , является $2n^2$ -кратно вырожденным. Согласно принципу Паули это означает, что на первом уровне может находиться 2 электрона, на втором – 8 и т. д. Заполнение каждого следующего уровня с увеличением числа электронов в атоме приводит к периодичности свойств элементов, отраженной в периодической таблице элементов Менделеева.

ЛЕКЦИЯ 7. Теория возмущений

7.1. Случай дискретного невырожденного спектра Шредингера в матричной форме

Иногда важным является учет влияния на систему незначительного воздействия, являющегося малым в сравнении с основным. Такое воздействие называют *возмущением*, а общий метод для вычисления таких поправок рассматривается *теорией возмущений*.

Пусть гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (7.1)$$

где \hat{V} представляет собой возмущение к «невозмущенному» оператору \hat{H}_0 .

Предполагается, что собственные функции $\psi_n^{(0)}$ и собственные значения $E_n^{(0)}$ дискретного спектра невозмущенного оператора нам известны, т. е. известны точные решения уравнения

$$\hat{H}_0 \psi^{(0)} = E^{(0)} \psi^{(0)}. \quad (7.2)$$

Требуется найти приближенные решения уравнения

$$\hat{H} \psi = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \psi = E \psi, \quad (7.3)$$

т. е. приближенные значения для собственных функций ψ_n и собственных значений E_n «возмущенного» оператора \hat{H} .

Вычисления будем производить в матричном виде. Для этого разложим искомую функцию ψ по функциям $\psi_n^{(0)}$

$$\psi = \sum_m c_m \psi_m^{(0)}. \quad (7.4)$$

Уравнение Шредингера в матричной форме получим, подставляя (7.4) в (7.3), используя (7.2), домножая полученное равенство на $\psi_k^{(0)*}$ и интегрируя по всем координатам

$$(E - E_k^{(0)}) c_k = \sum_m V_{km} c_m, \quad (7.5)$$

где матрица оператора возмущения

$$V_{km} = \int \psi_k^{(0)*} \hat{V} \psi_m^{(0)} dq. \quad (7.6)$$

Будем искать коэффициенты c_k и энергию E в виде разложения по степеням возмущения V

$$\begin{aligned} c_k &= c_k^{(0)} + c_k^{(1)} + \dots, \\ E &= E^{(0)} + E^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

В нулевом приближении, т. е. при пренебрежении в (7.3) оператором возмущения, естественно, $\psi_n = \psi_n^{(0)}$. Таким образом, в разложении (7.4)

присутствует только один член $c_n^{(0)} = 1$, $c_m^{(0)} = 0$ при $m \neq n$. Для отыскания первого приближения подставляем (7.7) в уравнение (7.5), сохраняя только члены первого порядка. Уравнение с $k = n$ дает

$$E_n^{(1)} = V_{nn} = \int \psi_n^{(0)*} \hat{V} \psi_n^{(0)} dq. \quad (7.8)$$

Таким образом, поправка первого приближения к n -му собственному значению равна среднему значению возмущения в состоянии $\psi_n^{(0)}$ (3.1). Уравнение (7.5) с $k \neq n$ дает

$$C_k^{(1)} = \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}. \quad (7.9)$$

Наконец, оставляя в уравнении (7.5) с $k = n$ только члены второго порядка, получаем

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}. \quad (7.10)$$

Поправка второго приближения к энергии основного (наинизшего) состояния всегда отрицательна – отрицательны все члены суммы в (7.10).

7.2. Секулярное уравнение

Результаты теории возмущений, изложенные выше, относятся к тому случаю, когда невозмущенный дискретный спектр является невырожденным. Выражения (7.9) и (7.10) в случае вырождения теряют смысл: если, например, в (7.9) состояния n и k имеют одинаковую энергию, то знаменатель равен нулю. Отсюда понятно, что если энергия E_k сближается с энергией E_n , то соответствующий коэффициент c_k становится не малым. Это соображение подсказывает построение теории возмущений при наличии вырождения невозмущенного спектра (или близости к вырождению).

Пусть вырожденными, для простоты, являются только 2 состояния. Оставим в точном уравнении для коэффициентов c_k только не малые, относящиеся к этим состояниям величины

$$\begin{cases} (E - E_1^{(0)})c_1 - (V_{11}c_1 + V_{12}c_2) = 0, \\ (E - E_2^{(0)})c_2 - (V_{21}c_1 + V_{22}c_2) = 0, \end{cases} \quad (7.11)$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум вырожденным состояниям.

Система (7.11) двух линейных алгебраических уравнения без правой части имеет отличные от нуля решения при равенстве нулю ее детерминанта

$$\begin{vmatrix} E_1^{(0)} - E + V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & E_2^{(0)} - E + V_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.12)$$

Уравнение (7.12) называется *секулярным* или *вековым* (от лат. *secularis* – вековой, столетний; название связано с тем, что такое уравнение впервые было выведено в небесной механике в связи с исследованием вековых колебаний орбит планет). Из этого уравнения (для случая вырождения двух состояний это квадратное уравнение), с учетом того, что $V_{21} = V_{12}^*$ и (2.5), получаются значения энергии

$$E = \frac{1}{2} \left[E_1^{(0)} + E_2^{(0)} + V_{11} + V_{22} \pm \sqrt{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + V_{11} - V_{22})^2 + 4|V_{12}|^2} \right] \quad (7.13)$$

В случае точного вырождения $E_1^{(0)} = E_2^{(0)}$ определяемые формулой (7.1) два значения энергии равны (при $V_{11} = V_{22} = 0$)

$$E = E^{(0)} \pm |V_{12}|. \quad (7.14)$$

Таким образом, *возмущение снимает вырождение*: появляется *расщепление* величиной $2|V_{12}|$ вырожденных без возмущения состояний.

7.3. Эффект Штарка

Эффектом Штарка называется изменение энергии уровней атома при помещении его во внешнее электрическое поле. Поскольку внешнее поле обычно гораздо меньше действующего на электроны поля ядра, этот

эффект можно рассчитать по теории возмущений. Вносимое электрическим полем возмущение имеет вид

$$V = -e(\vec{E}, \vec{r}), \quad (7.15)$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля.

Для атома водорода в наинизшем по энергии (основном) состоянии невозмущенная энергия электрона определяется формулой (6.11) с $n=1$. Данное состояние не вырождено, если не принимать во внимание несущественного в данном случае вырождения по проекции спина. Поэтому добавка к энергии этого состояния определяется формулой (7.10), которая есть второго порядка по V . Возмущению большей величины подвергаются состояния с $n=2$, поскольку являются вырожденными. Кратность вырождения уровня с $n=2$ равна 4, если не считать вырождение по проекции спина. Но при выборе оси z в направлении \vec{E} , переходы под действием возмущения (7.15) происходят только между состояниями с одинаковыми квантовыми числами m . Иными словами, матричные элементы $V_{nlm, n'l'm'} = 0$ при $m' \neq m$. Этот факт является следствием сохранения проекции импульса l_z при наличии возмущения (7.15). Поэтому линейное по V снятие вырождения электрическим полем имеет место при $n=2$ только для состояний с $l=0$, $m=0$ и $l=1$, $m=0$ (т. е. вырождение эффективно является двукратным) и, согласно (7.14), возникает расщепление энергии величиной $2|V_{200,210}| \approx eRr_a$, где r_a – радиус атома.

Лекция 8. Движение электрона в магнитном поле

8.1. Эффект Ааронова-Бома

Из выражения (ТПЗ.6) для энергии заряда в электромагнитном поле с учетом выражения (ТПЗ.5) для обобщенного импульса \vec{P} в нерелятивистском случае $v \ll c$ легко получить следующее выражение для функции Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + e\varphi,$$

где $\vec{p} = \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}$ – ньютоновский импульс, а φ и \vec{A} – скалярный и векторный потенциалы, соответственно.

По принципу соответствия гамильтониан электрона в магнитном поле ($\varphi=0$), казалось бы, должен иметь вид $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2$, где $\vec{P} = -i\hbar\nabla$, поскольку формула (3.5) написана именно для обобщенного импульса, сохранение которого следует из однородности пространства. Но в классической электродинамике нет понятия спина, поэтому классическая функция Гамильтона не учитывает взаимодействия связанного со спином магнитного момента с магнитным полем. Учитывающий данное взаимодействие гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{mc} \sigma H, \quad (8.1)$$

где $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ – квантовое число, определяющее величину проекции спина электрона на ось z , которая выбрана вдоль направления вектора \vec{H} .

Заметим, что в отличие от классической электродинамики, где в уравнения движения входят только напряженности полей, в уравнение Шредингера с гамильтонианом (8.1) входит непосредственно векторный потенциал, поэтому существуют квантовые эффекты, создаваемые потенциалом \vec{A} в тех областях пространства, где $\vec{H} = 0$ (эффект Ааронова-Бома).

8.2. Энергия электрона в магнитном поле

Если магнитное поле однородно (и направлено по оси z), то векторный потенциал может быть выбран в следующем виде (калибровка Ландау)

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0, \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{H}. \quad (8.2)$$

Произведем в уравнении Шредингера $\hat{H}\psi = E\psi$ замену волновой функции

$$\psi = \chi(y) \exp \left[\frac{i(p_x x + p_z z)}{\hbar} \right]. \quad (8.3)$$

Тогда с учетом (8.2) получим для функции χ уравнение Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H}' = -\frac{e\hbar\sigma H}{mc} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(y - y_0)^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m}, \quad (8.4)$$

где ω — частота вращения электрона в магнитном поле,

$$y_0 = -\frac{cp_x}{eH}, \quad (8.5)$$

$$\omega = \frac{|e|\hbar H}{mc}. \quad (8.6)$$

Гамильтониан \hat{H}' с точностью до прибавленного числа и заменой $x \rightarrow y - y_0$ совпадает с гамильтонианом (4.19) задачи о линейном осцилляторе. Поэтому, используя (4.25), сразу можно записать выражение для энергии электрона в магнитном поле

$$E = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma \right) \hbar\omega + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (8.7)$$

Таким образом, кинетическая энергия вращения электрона в магнитном поле квантуется. Функция (8.3) является собственной функцией операторов \hat{p}_x и \hat{p}_z с собственными значениями p_x и p_z (8.7). Отсюда следует, что второе слагаемое в (8.7) — это кинетическая энергия движения вдоль поля. Поскольку речь идет об обобщенном импульсе, то величина $p_x \neq mv_x$, как видно из (8.4) и (8.5), определяет положение y_0 центра орбиты в y -направлении, а значит гармонические колебания электрона происходят вокруг точки y_0 .

9.1. Обменное взаимодействие

В лекции 6 было введено понятие спина частицы и сформулировали принцип Паули. Естественен вопрос: какое значение может иметь для физических явлений наличие спина у частицы, если в уравнении Шредингера (4.6) спин (а точнее, оператор спина) отсутствует. Но принцип Паули заставляет отбирать среди всех возможных решений уравнения Шредингера те, которые удовлетворяют этому принципу. А поскольку в формулировке принципа Паули заложен спин частицы, то энергия системы оказывается зависящей от направлений спинов составляющих ее частиц. Примером могут служить два невзаимодействующих между собой фермиона с различным направлением спина. Принцип Паули позволяет им обоим находиться в одном состоянии с наименьшей энергией, поскольку с учетом различия направлений спинов их состояния являются разными. Если же у фермионов одинаковое направление спина, то один из них должен занять состояние с большей энергией, как результат, энергия всей системы оказывается больше.

Для более сложного случая, когда необходимо учитывать взаимодействие между частицами, удобно использовать и другую, несколько нестрогую формулировку принципа Паули: два фермиона с одинаковым направлением спина не могут находиться в одной точке пространства. Под одинаковыми состояниями в прежней формулировке мы понимаем здесь нахождение в одной точке. Более строгая формулировка гласит: волновая функция двух одинаковых фермионов с одинаковым направлением спина должна быть антисимметричной относительно перестановки координат \vec{r}_1 и \vec{r}_2 фермионов $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$, а с разным — симметричной. Из антисимметрии, естественно, следует $\psi = 0$ при $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. То есть из всех возможных решений уравнения Шредингера следует выбирать лишь те, что имеют правильную симметрию относительно перестановок частиц. Поскольку энергия кулоновского взаимодействия, например, двух электронов зависит от того, могут эти электроны сблизиться или нет, то энергия взаимодействия оказывается зависящей от спина электронов. Эта зависящая от спина часть энергии взаимодействия называется *обменной энергией* (название отражает ее связь с соображениями об обмене одинаковых частиц местами) и играет важную роль, в частности, в явлениях магнетизма.

9.2. Молекула водорода

Рассмотрим роль обменной энергии на примере образования молекулы водорода (В. Гайтлер, Ф. Лондон, 1927). В лекции 6 говорилось о вырождении состояний электрона по направлению спина в атоме водорода ввиду отсутствия спина в уравнении Шредингера. В лекции 7 было показано, что при снятии вырождения каким-либо возмущением может быть достигнут значительный выигрыш в энергии, линейный по величине возбуждения. В случае водорода вырождение снимается объединением двух атомов в молекулу H_2 . Возбуждением является взаимодействие с другим атомом электрона, находящегося, в основном, в одном из атомов; это возмущение можно считать слабым.

Гамильтониан двух электронов можно записать в виде

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}, \\ \hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} - e^2(r_{11}^{-1} + r_{22}^{-1}), \\ \hat{V} &= -e^2(r_{12}^{-1} + r_{21}^{-1} - r^{-1}),\end{aligned}\quad (9.1)$$

где индексы 1 и 2 у операторов импульса нумеруют электроны, r_{11} и r_{22} – расстояния между первым (вторым) электроном и ядром первого (второго) атома, r_{12} и r_{21} – расстояния каждого из электронов до «чужого» ядра, r – расстояние между электронами.

Решение «невозмущенной» задачи (без \hat{V}) запишем в виде произведения волновых функций ψ каждого электрона в своем атоме $\Psi_I = \psi(\vec{r}_{11})\psi(\vec{r}_{22})$, поскольку вероятность независимых событий равна произведению вероятностей.

Вследствие неразличимости частиц решением (с тем же значением энергии) является также функция, полученная из Ψ_I перестановкой координат электронов $\Psi_{II} = \psi(\vec{r}_{21})\psi(\vec{r}_{12})$. По общему правилу составления секулярного уравнения в случае снятия вырождения (лекция 7), ищем приближенное решение уравнения Шредингера в виде линейной суперпозиции

$$\Psi = c_I \Psi_I + c_{II} \Psi_{II}, \quad (9.2)$$

коэффициенты в которой должны быть найдены из уравнений (7.11). По формуле (7.2) величины расщепления энергии ΔE между ранее вырожденными состояниями

$$\Delta E = 2|V_{I,II}|. \quad (9.3)$$

Из (7.11) для одного из двух полученных вследствие расщепления состояний $c_{II} = -c_I$, для другого $c_{II} = c_I$. Таким образом, одно из них антисимметрично по перестановке электронов, т. е. соответствует параллельным направлениям их спинов, другое – антипараллельным. Причем симметричное состояние является нижним по энергии, если $V_{I,II} < 0$. Этот матричный элемент равен:

$$\begin{aligned}V_{I,II} &= \int \Psi_I \hat{V} \Psi_{II} d^3r_1 d^3r_2 = \\ &= -e^2 \int \psi(\vec{r}_{11})\psi(\vec{r}_{22})\psi(\vec{r}_{21})\psi(\vec{r}_{12})(r_{12}^{-1} + r_{21}^{-1} - r^{-1}) d^3r_1 d^3r_2.\end{aligned}\quad (9.4)$$

Видно, что этот интеграл не равен нулю только из-за перекрытия волновых функций электронов на соседних атомах. Если атомы слишком далеки друг от друга, то вблизи первого очень мала $\psi(\vec{r}_{12})$, а вблизи второго – $\psi(\vec{r}_{21})$. Видно, что в этот интеграл есть вклады разных знаков: притяжение электронов к «чужим» ядрам дают отрицательный вклад в $V_{I,II}$, а отталкивание между электронами – положительный. Конкретный расчет показывает, что преобладает отрицательный вклад, поскольку отрицательных членов суммы вдвое больше. Таким образом, наинизшем по энергии (основным) состоянием молекулы водорода является состояние с противоположными спинами пары электронов. Выигрыш в энергии происходит за счет обменного взаимодействия. Такое положение характерно для ковалентной связи атомов в молекулах.

Следует признаться в некоторой погрешности приведенного выше вывода. Дело в том, что использованные при выводе состояния Ψ_I и Ψ_{II} не ортогональны друг другу, т. е. величина $L = \int \Psi_I \Psi_{II} d^3r_1 d^3r_2 \neq 0$, а в качестве базиса в теории возмущений могут использоваться только ортогональные состояния. Нетрудно провести процедуру их ортогонализации, в результате в выражении (9.3) к величине $V_{I,II}$ должно быть добавлено слагаемое $2LV_{I,I}$, но это не влияет на изложенные физические выводы.

9.3. Ферромагнетизм и антиферромагнетизм

В рассмотренном случае молекулы водорода обменное взаимодействие приводит к выгоде противоположного направления спинов в соседних атомах. Но в ряде переходных металлов оказывается преобладающим член суммы в (9.4), соответствующий взаимодействию электронов друг с другом, т. е. обменное взаимодействие приводит к выгоде параллельного расположения спинов электронов, что приводит к явлению *ферромагнетизма*. Наглядно выгоду параллельных спинов можно пояснить следующим образом: принцип Паули запрещает электронам с параллельными спинами подходить слишком близко друг к другу, ограничивая тем самым энергию их отталкивания, которая, естественно, положительна.

В. Гейзенберг предложил учитывать обменные эффекты с помощью эффективного гамильтониана, который действует только на спиновые переменные частиц

$$\hat{H} = -2 \sum_{ab} J_{ab} \bar{s}_a \bar{s}_b, \quad (9.5)$$

где суммирование идет по частицам, \bar{s}_a – оператор спина отдельной частицы, J_{ab} – константы обменного взаимодействия.

Для простоты операторы спинов можно рассматривать просто как векторы, соответствующие направлению спина. Их скалярное произведение максимально, когда они параллельны, и минимально – в случае антипараллельности. Таким образом, при положительной константе J энергия минимальна при ферромагнитном состоянии электронной системы, а при отрицательной J выгодным оказывается антиферромагнитное состояние, когда спины электронов на соседних узлах решетки антипараллельны. Собственных значений скалярного произведения спинов двух электронов только два. Одно из них равно $1/4$ и соответствует параллельному направлению спинов (оно трехкратно вырождено), другое равно $-3/4$ и соответствует антипараллельным спинам. Таким образом, из этого гамильтониана для двух частиц мы опять имеем результат (9.3), а именно, два энергетических состояния с разницей энергий ΔE , совпадающей с (9.3), если принять $J = V_{1,11}$. Следовательно, если интересоваться только спиновым состоянием, то гамильтониан (9.5) эквивалентен гамильтониану (9.1) в случае двух электронов. Гамильтониан (9.5) также применим и в случае многих частиц.

Лекция 10. Зонная теория электронов в проводниках

10.1. Классическая теория электропроводности

В 1911 году английский ученый, лауреат Нобелевской премии 1908 года Эрнест Резерфорд (1871–1937) на основании результатов эксперимента по рассеянию альфа-частиц, предложил планетарную модель атома, в которой в центре атома расположено положительно заряженное ядро, вокруг которого вращаются электроны. Развитие этой модели позволило объяснить хорошую проводимость металлов, сравнительно неплохую проводимость полупроводников и отсутствие проводимости у диэлектриков. В металлах ядра атомов расположены в узлах правильной кристаллической решетки, а между ними находятся электроны, скрепляющие решетку, при этом, часть электронов коллективизированы и могут более или менее свободно переходить от одного атома к другому. В диэлектриках каждый электрон принадлежит своему атому и не имеет возможности перемещаться на большие расстояния.

В классической теории электропроводности, разработанной Паулем Друдом (1863–1906) в 1900 году и усовершенствованной Хендриком Лоренцом (1853–1928), было предположено, что носителями тока в металлах являются электроны, поведение которых подобно поведению молекул идеального газа. При движении электронов не принимаются во внимание их столкновения друг с другом, а *удельная электропроводность проводника* определяется как

$$\sigma = \frac{ne^2 l}{\bar{p}}, \quad (10.1)$$

где n – плотность коллективизированных электронов (электронов проводимости), e – заряд электрона, \bar{p} – средний импульс неупорядоченного движения электронов, l – длина свободного пробега электрона.

Формулу (10.1) легко получить, предполагая, что под действием внешнего электрического поля электрон проходит расстояние l до упругого столкновения с ионами, при которых он передает иону свой импульс. Казалось бы, длина свободного пробега не может быть больше межатомного расстояния, поскольку электроны постоянно сталкиваются с ионами, взаимодействие с которыми у них сильное (кулоновское). Такая длина пробега привела бы к весьма малой проводимости. Между

тем, как показывает эксперименты, длина свободного пробега может достигать сантиметров. Объяснение этого противоречия эксперимента и классической теории было дано на основании квантовомеханических представлений.

10.2. Теорема Блòха

Швейцарский физик, лауреат Нобелевской премии 1952 года Феликс Блòх (1905–1983) в 1928 г. доказал, что электрон, помещенный в периодический потенциал ионов кристаллической решетки, является свободной частицей, а взаимодействие с периодическим потенциалом не приводит к электросопротивлению. Математически теорема формулируется следующим образом.

Если гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}), \quad (10.2)$$

где $V(\vec{r})$ – потенциальная энергия, являющаяся периодической функцией координаты,

то стационарные волновые функции частицы (решения уравнения Шредингера $\hat{H}\psi = E\psi$) имеют вид

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i(\vec{k}, \vec{r})} u_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (10.3)$$

где $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ – периодическая функция координаты с тем же периодом, что и функция $V(\vec{r})$.

Точнее, поскольку речь идет о функциях трех пространственных переменных, нужно говорить о трех периодах – о трех векторных периодах прямой решетки \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и \vec{a}_3 . Вектор \vec{k} аналогичен волновому вектору свободной частицы. Величина $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, аналогичная импульсу свободной частицы, называется *квазиимпульсом*. Энергия частицы $E(\vec{p})$ является периодической с периодом обратной решетки функцией квазиимпульса \vec{p} .

Нестрогое доказательство теоремы приведем для одномерного случая, когда имеется только одна пространственная переменная x , а

a – период функции $V(x)$. Пусть $\psi(x)$ – одно из решений уравнения Шредингера с одномерным аналогом гамильтониана (10.2). Поскольку гамильтониан инвариантен относительно замены x на $x + na$, где n – любое целое положительное или отрицательное число, то функции $\psi(x + na)$ также являются решениями уравнения Шредингера, соответствующие тому же значению энергии E . Если для упрощения предположить, что спектр невырожден, то это должны быть те же самые функции. А именно, при смещении на a функция ψ может домножаться на произвольную константу c , поскольку домноженная на константу функция также есть решение линейного уравнения. Отсюда следует, что

$$\psi(x + na) = c^n \psi(x). \quad (10.4)$$

Константа $|c| = 1$, поскольку волновая функция не должна экспоненциально расти при $x \rightarrow \pm\infty$; c – фазовый множитель, который может быть записан в виде

$$c = e^{ika}, \quad (10.5)$$

где k – действительное число.

Подставляя в (10.4) выражение (10.5) и функцию ψ в виде $\psi(x) = e^{ikx} u_k(x)$, убеждаемся, что $u_k(x)$ – периодическая функция с периодом a .

Таким образом, утверждение (10.3) доказано. Если имеет место вырождение, то нетрудно доказать, что из линейной комбинации функций ψ , соответствующих одной энергии E , можно построить функцию вида (10.3).

Функция $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ называется *блоховской амплитудой*.

Для свободной частицы вне кристалла значение импульса $p = \hbar k$ может быть любым. В случае же кристалла, если мы добавим к k величину $2\pi/a$, то в одномерном аналоге функции (10.3) появится дополнительный множитель $e^{\frac{2\pi i x}{a}}$, являющийся периодической функцией вида $u(x)$ с периодом a . Это означает, что изменение волнового числа на $2\pi/a$ приводит к той же задаче, т. е. все физически различные состояния частицы находятся в интервале k длиной $2\pi/a$, а выход за этот

интервал приводит к периодическому повторению состояний. В частности, из этого рассуждения следует периодичность энергии

$$E(p) = E\left(p + \frac{2\pi\hbar}{a}\right),$$

где $\frac{2\pi\hbar}{a}$ – период обратной решетки.

Интервал значений p , включающий все различные состояния электрона в кристалле, удобно выбрать в виде $-\frac{\pi\hbar}{a} < p < \frac{\pi\hbar}{a}$. В «компенсацию» ограниченности интервала квазиимпульсов при каждом заданном p уравнение Шредингера имеет бесконечное число решений. Как результат, электронный спектр в кристаллическом проводнике $E_m(p)$ оказывается *зонным*, т. е. энергия зависит от номера зоны m и в каждой зоне от непрерывной переменной p .

10.3. Зоны Бриллюэна. Зоны проводимости. Электронная и дырочная проводимости

При переходе к трехмерному случаю, картина усложняется за счет того, что периоды прямой и обратной решеток представляют собой векторы, величина и направление которых зависит от типа и размеров кристаллической решетки. Область физически различных состояний из отрезка прямой на оси p превращается в сложно ограниченную область в \vec{p} -пространстве, называемую *зоной (ячейкой) Бриллюэна*. Данное рассмотрение выходит за рамки нашей программы.

Можно показать, что для электронов в кристалле справедливы уравнения Гамильтона (М4.1), которые можно записать в виде

$$\vec{v} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad (10.6)$$

где $\vec{v} = \int \psi^* \left(\frac{\hat{p}}{m} \right) \psi d^3r$ – среднее в смысле квантовой механики значение скорости (3.1), а $U(\vec{r})$ – внешний приложенный потенциал, меняющийся на расстояниях, значительно превышающих период решетки.

Уравнения (10.6) показывают, в каком смысле электрон в кристалле можно считать свободным: в отсутствие внешнего поля электрон имеет, вообще говоря, отличную от нуля среднюю скорость, а при приложении внешней силы непрерывно изменяет свой квазиимпульс. Поскольку для периодической функции $E(p)$ производная dE/dp неизбежно в некоторых областях p отрицательна, то увеличение импульса частицы может как ускорять частицу, так и замедлять ее.

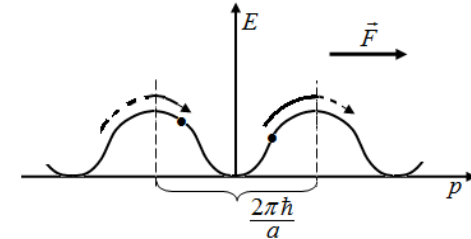


Рисунок 3.6

Согласно принципу Паули каждое состояние может быть заполнено только двумя электронами (спин которых противоположно направлен), а значит можно говорить о полностью заполненной энергетической зоне. Очевидно, что приложение к электронам такой зоны некоторой небольшой силы не приводит ни к каким последствиям, поскольку никакого перераспределения электронов внутри заполненной зоны произойти не может. С точки зрения уравнений (10.6) происходит следующее: каждый электрон, непрерывно изменяя свой импульс, подходит к границе ячейки Бриллюэна, пересекает ее и вновь оказывается с другой стороны среди состояний этой же зоны (рис. 3.6). Поскольку его скорость за время движения оказывается направленной то по приложенной силе, то против нее, суммарный ток заполненной зоны равен нулю. Таким образом, в проводимость дают вклад только частично заполненные зоны – так называемые *зоны проводимости*.

Особый интерес представляют состояния электронов вблизи минимума и максимума энергии не полностью заполненной зоны. Вблизи этих экстремумов функция $E(\vec{p})$ всегда может быть представлена в виде

$$E(\vec{p}) = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{ik} (m^{-1})_{ik} p_i p_k. \quad (10.7)$$

В (10.7) E_0 – константа, а суммирование ведется по проекциям вектора \vec{p} , отсчитанного от точки экстремума. Коэффициенты разложения $(m^{-1})_{ik}$ образуют тензор, который по аналогии с энергией свободной частицы $E = p^2/2m$ называют *тензором обратных масс*. В случае минимума энергии массы положительны, в случае максимума – отрицательны. В изотропном случае тензор превращается в скаляр $(m^{-1})_{ik} = (m^*)^{-1} \delta_{ik}$. В этом случае $E = p^2/2m^*$, а величину m^* , не совпадающую, вообще говоря, с массой свободного электрона, называют *эффективной массой*. Вблизи максимума в соответствии с уравнениями (10.6), скорость частицы направлена в обратную сторону по отношению к квазиимпульсу, а под действием внешней силы частица начинает двигаться в сторону, обратную силе.

Если зона заполнена электронами только вблизи своего дна, где выполняется разложение (10.7) с положительными $(m^{-1})_{ik}$, то поведение электронов этой зоны во внешних полях качественно не отличается от поведения электронов в вакууме.

Если же зона заполнена почти полностью, так что свободными остаются только состояния вблизи «потолка» зоны, где справедливо разложение (10.7) с отрицательными $(m^{-1})_{ik}$, то эти свободные от заполнения состояния, называемые *дырками*, ведут себя как частицы с положительными массами и положительным зарядом, обратным заряду электрона. Это понятно из следующего рассуждения. Если мы добавим недостающие до полного заполнения электроны, то, как было сказано выше, полный ток зоны во внешнем электрическом поле станет равным нулю. Далее убираем добавленные заряды. При выемке одного заряда системы изменяется на $-e$. Опустевшее место движется под действием внешнего электрического поля, естественно, туда же, куда двигался вынутый электрон отрицательной массы – против действия силы $e\vec{E}$ на электрон или, что то же самое, по действию силы $(-e)\vec{E}$ на положительно заряженную дырку с положительной массой. Это движение создает ток того же направления, что и в случае обычных электронов в вакууме.

Действительно, пусть электрическое поле действовало на частицы в течение времени t (*время свободного пробега*). За это время вынутый

электрон (дырка) приобретает скорость $\vec{v}_h = \frac{e\vec{E}t}{-m^*} = \frac{(-e)\vec{E}t}{m^*}$ (величина m^* взята положительной, индекс h означает дырку). До выемки электроны отрицательной массы давали вклад в плотность тока (ТП 7.11)

$$en_h\vec{v} = \frac{e^2 n_h \vec{E} t}{-m^*}, \quad (10.8)$$

где n_h – обычная (не зарядовая) плотность дырок, $\rho = en$.

Следовательно, после выемки плотность тока для частиц с зарядом $-e$ и массой m^* станет

$$\vec{j}_h = \frac{(-e)^2 n_h \vec{E} t}{m^*}. \quad (10.9)$$

Если одна из энергетических зон заполнена у дна (плотность электронов n_e), а другая – почти полностью (плотность дырок n_h), то полная плотность тока в электрическом поле

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_h = e^2 \vec{E} t \left(\frac{n_e}{m_e^*} + \frac{n_h}{m_h^*} \right). \quad (10.10)$$

Таким образом, в случае действия электрического поля электроны и дырки дают вклады в ток, имеющие одинаковые знаки.

В скрещенных электрическом и магнитном полях возникает ток *холловского* дрейфа, скорость движения (ТП 6.14) в котором $\vec{v} = c \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{H^2}$ не зависит от типа частиц и поэтому в соответствующий холловский ток электроны и дырки дают вклады разного знака

$$\vec{j}_H = [en_e + (-e)n_h] \vec{v}. \quad (10.11)$$

По формулам (10.10) и (10.11) из эксперимента определяют концентрации электронов и дырок в проводнике.

Определим энергетический спектр электронов в одномерной модели сильной связи. Это модель цепочки достаточно удаленных друг от друга атомов, так что переходы электронов между ними весьма редки. Следо-

IV. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ЛЕКЦИЯ 1. Введение. Фазовое пространство.

Статистическое распределение. Энтропия

Статистическая физика изучает закономерности, которым подчиняется поведение макроскопических тел, т. е. тел, состоящих из колоссального количества отдельных частиц. Казалось бы, что с увеличением числа частиц свойства такой механической системы существенно усложняются и теряются всякие закономерности. В действительности же, появляются новые, так называемые *статистические* закономерности, непосредственно связанные с теорией вероятностей. Значение статистики в том, что она изучает макроскопические тела, с которыми мы постоянно имеем дело на практике и в технике.

1.1. Фазовое пространство

Пусть механическая система имеет s степеней свободы, т. е. положение точек этой системы в пространстве задается s координатами q_i . Для полного задания состояния механической системы в какой-то момент времени необходимо задать еще s значений импульсов этих материальных точек p_i . Введем формально систему координат в $2s$ -мерном пространстве: на s осях в этом пространстве будем откладывать значения q_i , а на остальных s осях — значения p_i . Таким образом, состояние всей макроскопической системы в этом пространстве, называемом *фазовым*, будет изображаться точкой. Со временем положение этой *фазовой точки системы* будет изменяться, описывать некоторую линию, называемую *фазовой траекторией системы*.

Если рассматриваемая система является замкнутой, то, в принципе, фазовая траектория может быть определена, но при больших s — это практически неразрешимая задача. Если же рассматриваемая макроскопическая система незамкнута, т. е. является *подсистемой* (частью) некоторой замкнутой системы, то фазовая траектория неизвестна принципиально. Поэтому уместно говорить лишь о вероятности w нахождения фазовой точки в каком-либо элементе фазового пространства

вательно, в главном приближении электроны находятся на своих узлах, имея там энергию своего n -го уровня $E^{(0)} = E_n$ и свою атомную волновую функцию $\psi^{(0)} = \psi_{nr}$, где r — номер узла. Поскольку энергия $E^{(0)}$ на всех узлах одинакова, в задаче имеется бесконечнократное вырождение и следует пользоваться секулярным уравнением (лекция 7), т. е. искать решение в виде линейной комбинации вырожденных состояний $\psi = \sum_r c_r \psi_{nr}$ и секулярное уравнение для коэффициентов c_r имеет вид

$$(E - E_n)c_r - V(c_{r+1} + c_{r-1}) = 0, \quad (10.12)$$

где V — матричный элемент перескока электрона с данного атома на ближайшие (перескоками на более дальние расстояния пренебрегаем как еще менее вероятными).

Легко проверить, что уравнения (10.12) имеют решение

$$c_r = e^{i\alpha r} \quad (10.13)$$

с произвольной константой α , а энергия

$$E_n(p) = E_n + 2V \cos \frac{pa}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{pa}{\hbar}. \quad (10.14)$$

В соответствии с теоремой Блоха энергия (10.14) есть периодическая функция квазиимпульса p с периодом $2\pi\hbar/a$, где a — расстояние между атомами, и волновая функция

$$\psi = \sum_r c_r \psi_{nr} = \sum_r e^{\frac{ipar}{\hbar}} \psi_{nr} = e^{\frac{ipx}{\hbar}} \sum_r \psi_{nr} \quad (10.15)$$

соответствует волновой функции Блоха (10.3), где при преобразовании учтено, что область локализации атомной волновой функции ψ_{nr} гораздо меньше, чем межатомное расстояние a .

$$w = \rho(p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, q_s, t) dp dq, \quad (1.1)$$

где ρ – функция статистического распределения или просто функция распределения, а $dp dq = dp_1 dp_2 \dots dp_s dq_1 dq_2 \dots dq_s$.

Поскольку сумма вероятностей всех возможных положений фазовой точки равна 1, то условие нормировки для функции ρ имеет вид

$$\int \rho dp dq = 1. \quad (1.2)$$

Зная функцию распределения, можно найти среднее значение любой физической величины $f(p, q)$, зависящей от координат и импульсов

$$\bar{f} = \int f(p, q) \rho dp dq. \quad (1.3)$$

Таким образом, среднее значение есть сумма произведений всех возможных значений величины на вероятности этих значений.

1.2. Статистическое равновесие

Если макроскопическая система долгое время предоставлена самой себе, то из-за сложности взаимодействий в ней фазовая траектория столь запутанна, что проходит все возможные фазовые точки, а функция распределения ρ перестает зависеть от времени. Такое состояние системы называют состоянием *статистического (термодинамического, или теплового) равновесия*. Если в какой-то момент времени система была выведена из этого состояния внешними воздействиями, то за некоторое время, называемое *временем релаксации*, она вернется в состояние равновесия.

1.3. Микроканоническое и каноническое распределения

Рассмотрим функцию распределения системы в состоянии статистического равновесия. Поскольку в процессе релаксации фазовая точка системы может побывать во всех допустимых участках фазового пространства, то ее пребывание в этих участках должно быть равновероятным. Допустимость участков определяется законами сохранения: если

система замкнута, то ее полная энергия, импульс и момент импульса сохраняются, т. е. фазовая точка может находиться только в областях с фиксированным значением этих величин. Если заниматься только не вращающимися и покоящимися в целом системами, то из сказанного следует следующая функция распределения для замкнутой макроскопической системы в состоянии термодинамического равновесия

$$\rho = \text{const } \delta(E - E_0). \quad (1.4)$$

δ -функция обеспечивает зануление распределения в точках фазового пространства, в которых энергия системы отличается от фиксированного значения E_0 . Постоянный множитель в (1.4) может быть определен из условия нормировки (1.2). Распределение (1.4) называется *микроканоническим*.

Для подсистемы большой системы энергия не сохраняется, поэтому распределение (1.4), строго говоря, не верно. При этом понятно, что распределение тоже является функцией энергии $\rho(E)$. Мысленно разобьем подсистему на две подсистемы. Взаимодействием между частицами этих подсистем, происходящим только на границе между ними, можно пренебречь по сравнению с внутренней энергией подсистем, т. е. можно положить $E = E_1 + E_2$. Подсистемы можно считать независимыми в статистическом смысле, а вероятности независимых событий перемножаются

$$\rho(E_1 + E_2) = \rho(E_1) \rho(E_2). \quad (1.5)$$

Свойством (1.5) обладает только показательная функция

$$\rho = A e^{-\beta E}, \quad (1.6)$$

где A и β – константы.

Позже мы увидим, что константа β непосредственно связана с температурой T : $\beta = \frac{1}{T}$. В этой формуле температура считается измеренной в энергетических единицах, т. е. если T измерена в градусах, то $\beta = \frac{1}{kT}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Распределение

$$\rho = Ae^{-\frac{E}{T}} \quad (1.7)$$

справедливое для подсистемы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, называется *каноническим* или *распределением Гиббса* (1901).

До сих пор мы подразумевали систему, подчиняющуюся классической механике. В квантовом случае вместо (1.1) и (1.7) следует писать

$$w_n = Ae^{-\frac{E_n}{T}}, \quad (1.8)$$

где w_n – вероятность того, что система находится в n -ом состоянии, энергия которого E_n .

Следует сказать, что при вычислении средних физических величин по формуле (1.3) безразлично, пользоваться ли микроканоническим распределением (1.4) либо каноническим (1.7), поскольку относительные отклонения энергии системы от среднего значения оказываются пренебрежимо малыми. Однако удобнее использовать распределение (1.7).

1.4. Энтропия

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеются N ячеек, в которые разложены n шаров, причем шары могут подпрыгивать и перескакивать из ячейки в ячейку. Вначале мы разложили шары в первые n ячеек и точно знали, где они находятся. Позже можно говорить только о вероятности найти шар в ячейке. По истечении большого периода времени (времени релаксации) обнаружение шара в любой из ячеек станет равновероятным. В конце процесса нашему знанию о системе (макроскопическому ее состоянию) соответствует $\Gamma = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ конкретных возможностей размещения шаров (микроскопических состояний), притом, что вначале процесса $\Gamma = 1$.

Число Γ микроскопических состояний, являющихся возможной реализацией данного макроскопического состояния называется его *статистическим весом*, а логарифм этой величины – *энтропией*

$$S = \ln \Gamma. \quad (1.9)$$

Как и в примере с шарами, *энтропия замкнутой системы возрастает со временем, принимая максимальное значение в состоянии статистического равновесия* – это утверждение называют также *вторым началом* (законом) *термодинамики* (Клаузиус-Больцман).

Если макроскопическое состояние «охватывает» объем фазового пространства $\Delta p \Delta q$, то

$$\Gamma = \frac{\Delta p \Delta q}{(2\pi\hbar)^s}, \quad (1.10)$$

где s – число степеней свободы, поскольку на единицу объема фазового пространства приходится $(2\pi\hbar)^{-s}$ квантовых состояний системы, что следует из решения задачи о потенциальном ящике (лекция 4КМ).

ЛЕКЦИЯ 2. Термодинамика

Физические величины, характеризующие макроскопическое состояние тел, называют *термодинамическими*. *Термодинамика* изучает соотношения между термодинамическими величинами.

2.1. Температура

Рассмотрим два тела, составляющих вместе замкнутую систему, находящуюся в тепловом равновесии. Энергия системы E есть сумма энергий каждого из тел $E = E_1 + E_2$. Это же относится и к энтропии S системы – энтропия, как и энергия, аддитивная величина: количество возможных состояний для составного тела есть произведение количеств возможных состояний для частей, а энтропия есть логарифм этой величины. Следовательно,

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2).$$

В состоянии теплового равновесия энтропия максимальна, поэтому условие максимума должно соблюдаться и относительно переменной E_1 , а именно, $\frac{dS}{dE_1} = 0$. Откуда следует

$$\frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dE_1} = \frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2} = 0,$$

$$\frac{dS_1}{dE_1} = \frac{dS_2}{dE_2}.$$

Было использовано то, что $E_2 = E - E_1$, а энергия замкнутой системы – константа.

Таким образом, если система находится в состоянии термодинамического равновесия, то производная от энтропии по энергии для всех ее частей одинакова. Величину, обратную этой производной называют температурой T .

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}. \quad (2.1)$$

Следовательно, температуры тел, находящихся в равновесии друг с другом, одинаковы, $T_1 = T_2$. Введенная формулой (2.1) температура имеет размерность энергии. Ее перевод в Кельвины осуществляется с помощью постоянной Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К: $T(\text{Кельвин}) = T(\text{Дж})/k$.

2.2. Адиабатический процесс

Кроме замкнутых систем необходимо ввести понятие *теплоизолированных* систем – макроскопических тел, не взаимодействующих с другими телами, но находящихся во внешнем поле, вообще говоря, меняющемся со временем. Под внешним полем (внешними условиями) мы будем понимать стенки, ограничивающие объем системы.

Адиабатическим процессом называется медленное по сравнению со временем релаксации изменение внешних условий (объема тела). Поскольку энтропию внешнего поля можно считать равной нулю (т. к. поле однозначно задано), энтропия тела при адиабатическом процессе не меняется. Аналогия с шарами в ячейках: равномерное сжатие всех ячеек не изменит распределение шаров по ним.

Если внешние условия формально обозначить некоторым параметром λ , то данное утверждение можно записать для изменения в адиабатическом процессе средней энергии тела

$$\frac{\partial \bar{E}(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)_s, \quad (2.2)$$

где частная производная берется при постоянной энтропии.

Здесь введено определение термодинамической энергии тела

$$E = \bar{E}(p, q, \lambda). \quad (2.3)$$

Черта над \bar{E} в формулах (2.2) и (2.3) означает, что производится усреднение по всем микроскопическим реализациям макроскопического состояния тела.

2.3. Давление

Найдем силу, с которой тело действует на границу своего объема (стенку). По известной формуле механики

$$\vec{F} = - \frac{\partial E(p, q, \vec{r})}{\partial \vec{r}},$$

где $E(p, q, \vec{r})$ – энергия тела как функция импульсов и координат его частиц, а также радиус-вектора элемента ограничивающей тело поверхности, силу действия на который мы ищем.

Усредняя это равенство и пользуясь (2.2) и (2.3), имеем

$$\bar{\vec{F}} = - \frac{\partial \bar{E}(p, q, \vec{r})}{\partial \vec{r}} = - \left(\frac{\partial E}{\partial \vec{r}} \right)_s$$

Ограничимся далее рассмотрением жидкостей и газов, энергия которых зависит только от объема V , но не формы тела. Тогда имеем

$$\bar{\vec{F}} = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \right) = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_s d\vec{s},$$

где $d\vec{s}$ – элемент поверхности, а $dV = d\vec{s} d\vec{r}$.

Давление P есть по определению абсолютная величина силы, действующей на единицу площади поверхности

$$P = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S. \quad (2.4)$$

С учетом возможности изменения объема тела определение температуры (2.1) должно быть уточнено: поскольку при получении (2.1) мы считали объем постоянным, то

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V. \quad (2.5)$$

Равенства (2.4) и (2.5) могут быть записаны вместе в виде важного для дальнейшего изложения соотношения между дифференциалами

$$dE = TdS - PdV. \quad (2.6)$$

2.4. Работа и количество тепла

Если стенки сосуда перемещаются, изменяя объем тела, то внешние силы производят над телом работу

$$\Delta R = -P \int d\vec{r} d\vec{s} = -PdV. \quad (2.7)$$

Действительно, $-Pd\vec{s}$ – это сила действия стенки на элемент поверхности тела, ее произведение на $d\vec{r}$ – производимая над этим элементом работа. Если тело теплоизолировано, то изменение его энергии равно произведенной над ним работе ΔR . В общем случае энергия изменяется также за счет тепла ΔQ , переданного телу от других тел.

$$dE = \Delta R + \Delta Q = -PdV + \Delta Q. \quad (2.8)$$

Сравнивая (2.8) с (2.6), находим

$$\Delta Q = TdS. \quad (2.9)$$

Бесконечно малые изменения величин R и Q мы обозначаем буквой Δ вместо d по следующей причине. Эти изменения не являются дифференциалами каких-либо функций, характеризующих состояние тела, поскольку произведенная работа и переданное тепло зависят не только

от начального и конечного состояния тела, а и от пути, по которому протекает процесс, т. е. от соотношения изменений переменных S и V .

Количество тепла, при получении которого температура тела повышается на единицу, называется *теплоемкостью*. Теплоемкость C зависит от того, при каких условиях происходит нагревание тела. Различают теплоемкость при постоянном объеме C_V и постоянном давлении C_P . Как следует из (2.9),

$$\begin{aligned} C_V &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \\ C_P &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Можно доказать, что $C_P > C_V$.

2.5. Термодинамические функции (термодинамические потенциалы)

Поскольку дифференциал энергии простым соотношением (2.6) выражается через дифференциалы S и V , энергия является удобной термодинамической функцией, если равновесное термодинамическое состояние системы задано переменными S и V . Но состояние можно задавать любой другой парой независимых переменных, например, S и P . В этом случае удобно пользоваться другой термодинамической функцией

$$W = E + PV, \quad (2.11)$$

называемой *энтальпией* или *тепловой функцией*, поскольку дифференциал от нее $dW = dE + PdV + VdP$ с учетом (2.6) просто выражается через дифференциалы S и P

$$dW = TdS + VdP. \quad (2.12)$$

Из сравнения (2.12) с (2.9) видно, что изменение энтальпии при постоянном давлении равно получаемому телом теплу. Отсюда теплоемкость при постоянном давлении

$$C_P = \left(\frac{\partial W}{\partial T} \right)_P. \quad (2.13)$$

С учетом (2.6) и (2.10) теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (2.14)$$

Удобной относительно переменных T и V является функция

$$F = E - TS, \quad (2.15)$$

называемая *свободной энергией*.

Ее дифференциал с использованием (2.6)

$$dF = -SdT - PdV. \quad (2.16)$$

Из сравнения (2.16) с (2.7) видно, что изменение свободной энергии при изотермическом процессе равно произведенной над телом работе.

Относительно переменных P и T удобна функция

$$\Phi = W - TS, \quad (2.17)$$

которая называется *термодинамическим потенциалом*.

Ее дифференциал

$$d\Phi = -SdT + VdP. \quad (2.18)$$

До сих пор мы считали число частиц в теле N фиксированным. Если формально рассматривать N как еще одну независимую переменную, то для дифференциала энергии запишем

$$dE = TdS - PdV + \mu dN. \quad (2.19)$$

Величина

$$\mu = \left(\frac{dE}{dN} \right)_{S,V} \quad (2.20)$$

называется *химическим потенциалом* тела.

Аналогично имеем

$$dW = TdS + VdP + \mu dN, \quad (2.21)$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN, \quad (2.22)$$

$$d\Phi = -SdT + VdP + \mu dN. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что

$$\mu = \left(\frac{d\Phi}{dN} \right)_{P,T}. \quad (2.24)$$

Нетрудно понять, что из этого равенства следует

$$\Phi = N\mu, \quad (2.25)$$

поскольку при фиксированных давлении и температуре состояние вещества задано и потенциал Φ просто пропорционален количеству вещества. Таким образом, химический потенциал тела – это его термодинамический потенциал, отнесенный к одной молекуле.

Вместо того, чтобы рассматривать тело, задаваясь числом частиц в нем и считая его объем переменной величиной, мы можем выделить внутри тела некий заданный объем, а переменной считать число частиц в этом объеме. Часто удобно при этом брать в качестве переменной не величину N , а химический потенциал μ . Удобной относительно переменных T и μ термодинамической функцией является так называемый Ω -потенциал

$$\Omega = F - \mu N = F - \Phi = -PV. \quad (2.26)$$

Дифференциал этой функции получаем из (2.22), исключив изменение объема,

$$d\Omega = -SdT - Nd\mu. \quad (2.27)$$

ЛЕКЦИЯ 3. Принцип Ле Шателье. Теорема Нернста

3.1. Принцип Ле Шателье

Термодинамический принцип, сформулированный в 1884 году французским физиком и химиком Анри Луи Ле Шателье (1850–1936) и носящий его имя гласит: внешнее воздействие, выводящее тело из равновесия, стимулирует в нем процессы, стремящиеся ослабить результаты этого воздействия.

Рассмотрим цилиндр с газом, снабженный поршнем, который может двигаться, а может быть и застопорен. С другой стороны поршня – атмосфера, создающая некоторое постоянное давление (рис. 4.1). Причем

под телом, о котором говорится в принципе Ле Шателье, мы подразумеваем как газ в цилиндре, так и снаружи, а также и сам поршень. Понятно, что если поршень может свободно двигаться, то установится равенство давлений с двух его сторон. В цилиндре будет также атмосферное давление – в этом будет заключаться внутреннее равновесие рассматриваемого тела.

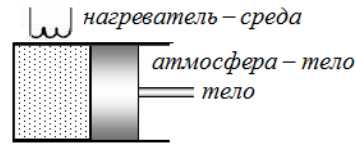


Рисунок 4.1

В качестве внешней среды, которая может создавать внешнее воздействие на тело, введем снаружи цилиндра некий нагреватель, который через стенку цилиндра может нагревать газ, т. е. передавать ему некоторое количество энергии в форме тепла. Равновесие тела с этим внешним объектом имеет место при равенстве температур нагревателя и газа. Включение нагревателя обеспечивает переход количества тепла dQ в цилиндр и подъем температуры газа на ΔT . Но этот нагрев можно производить как при застопоренном поршне, т. е. при сохранении объема газа, так и при свободном поршне, т. е. при заданном давлении. Очевидно, что при повышении температуры газа его давление повысилось бы при постоянном объеме, поэтому свободный поршень будет выдвигаться. Из принципа Ле Шателье следует, что $|(\Delta T)_p| < |(\Delta T)_V|$, так как движение поршня в данном примере – это тот внутренний процесс в теле, который ослабляет результат внешнего воздействия – повышение температуры.

Принцип Ле Шателье – это проявление устойчивости термодинамического равновесия, суть которого в том, что система сопротивляется попытке вывести ее из равновесия.

Принцип Ле Шателье математически выводится из утверждения второго начала термодинамики о том, что энтропия максимальна в состоянии термодинамического равновесия.

Запишем энтропию тела и внешней среды («тела» и нагревателя в рассмотренном примере) как функцию двух переменных $S(x, y)$, где переменная x регулирует равновесие тела со средой (энергия газа E в примере), а переменная y – внутреннее равновесие тела (объем газа под поршнем V). Условия максимума энтропии как любой функции двух переменных имеют вид (введены обозначения $\frac{\partial S}{\partial x} = -X$ и $\frac{\partial S}{\partial y} = -Y$)

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y > 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x > 0, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x^2 > 0. \quad (3.3)$$

Если нарушается равновесие со средой, причем делается это при неизменной внутренней переменной y , т. е. тепло передается при застопоренном поршне, то условие $X = 0$ нарушается, величина X становится равной

$$(\Delta X)_y = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y dx.$$

При этом нарушается и внутреннее равновесие $Y = 0$.

Если же внешнее равновесие нарушать при сохранении внутреннего равновесия (свободный поршень), то изменение X

$$(\Delta X)_{y=0} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y dx. \quad (3.4)$$

Чтобы сравнить между собой эти изменения X , запишем полные дифференциалы величин X и Y

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x dy, \quad (3.5)$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x dy. \quad (3.6)$$

Из условия $dY = 0$ выразим из (3.6) dy через dx и подставим в (3.5).

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y - \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x^2}{\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x}.$$

Здесь также учтено, что $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x$, поскольку обе эти величины являются второй производной от энтропии $-\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right)$ (порядок переменных во второй производной безразличен). Знаменатель второго слагаемого положителен благодаря условию (3.2). Используя также (3.3), имеем

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y > \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y=0} > 0, \quad (3.7)$$

$$|(\Delta X)_y| > |(\Delta X)_{y=0}|. \quad (3.8)$$

Что и требовалось доказать, а именно, неравновесие тела ΔX , возникшее под внешним воздействием, меньше, если в теле происходят процессы, приводящие к внутреннему равновесию.

В рассмотренном примере роль X выполняет величина $-\frac{\partial S}{\partial Q}$, которая, согласно (2.9), равна $\left(-\frac{1}{T} + \frac{1}{T_H}\right)$, $S = S_T + S_H$, $dQ_T = -dQ_H$, где индексы T и H относятся к телу и нагревателю, соответственно.

Таким образом, неравенство (3.8) для этого примера приводит к уже упоминавшемуся неравенству $|(\Delta T)_p| < |(\Delta T)_V|$.

Еще один пример подобного рода: вместо поршня, связывающего газ с атмосферой, соединим данную емкость с газом с другой емкостью (рис. 4.2). Стенки между емкостями могут как пропускать, так и не пропускать тепло. Тогда из (3.8) следует, что $|(\Delta T_1)_{T_2=T_1}| < |(\Delta T_1)_{T_2=const}|$, т. е. повышение температуры нагреваемого извне газа в первой емкости будет меньше, если обе емкости могут обмениваться теплом. Чтобы в этом убедиться, нужно положить $dx = dQ_1$ (тепло полученное газом в первой емкости от нагревателя), а $dy = dQ_2$ (тепло, полученное газом во второй емкости от первой). Тогда

$$X = -\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_H}, \quad Y = -\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}.$$

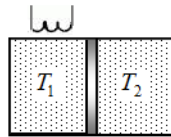


Рисунок 4.2

3.2. Теорема Нернста

Эта теорема, называемая еще *третье начало термодинамики*, была сформулирована немецким физиком, лауреатом Нобелевской премии 1920 года Вальтером Нернстом (1864–1941) в 1906 г.

Теорема Нернста: энтропия всякого тела обращается в нуль при абсолютном нуле температуры ($T = 0$).

Доказывается следующими рассуждениями. Из (2.14) следует, что энергия монотонно возрастающая функция температуры, если учесть, что теплоемкость положительна. Следовательно, энергия имеет наименьшее значение при $T = 0$. А значит, тело должно находиться при $T = 0$ в наимизшем, основном состоянии системы. В квантовой механике доказывается, что основное состояние не может быть вырожденным, т. е. оно одно. Поэтому, согласно (1.9) $S = \ln 1 = 0$. Обратим внимание, что это результат квантовый, в классике состояния пересчитываемы, поэтому энтропия определена с точностью до постоянного слагаемого.

Перечислим некоторые выводы из теоремы Нернста.

Непосредственно из (2.10) видно, что при $T = 0$ обращаются в нуль теплоемкости C_V и C_P , поскольку производная $\frac{\partial S}{\partial T}$ не может стремиться к бесконечности при $T \rightarrow 0$ достаточно быстро, если сама энтропия стремится к нулю в этом пределе. Аналогичным образом можно доказать, что к нулю стремятся коэффициент теплового расширения $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

и тепловой коэффициент давления $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$.

Докажем первое из этих утверждений о том, что $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0$ при $T = 0$. Используя (2.18), имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P.$$

Во второй производной от Φ поменяем порядок взятия производных. Тогда с учетом (2.18) получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Доказываемое утверждение прямо следует из того факта, что, очевидно, $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = 0$ при $T = 0$, поскольку энтропия равна нулю при нулевой температуре при любом давлении.

ЛЕКЦИЯ 4. Обратимые и необратимые процессы

4.1. Термодинамические процессы. Расширение газа в пустоту

Обратимым называется такой процесс в замкнутой или теплоизолированной системе, изменение состояния системы при котором возможно как в прямом, так и в обратном направлении.

Из закона возрастания энтропии следует, что обратимыми могут быть только те процессы, при которых энтропия замкнутой (теплоизолированной) системы остается неизменной. Обращение во времени процесса, увеличивающего энтропию, противоречило бы данному закону. Обратимым, в частности, является адиабатический процесс (лекция 2).

Рассмотрим процесс расширения газа в пустоту, например, если устранивается перегородка, не позволяющая газу занять весь объем некоторого сосуда. В этом процессе, очевидно, сохраняется энергия газа E . Из выражения (2.6) следует, что изменение энергии $dE = 0$, если между изменениями объема и энтропии имеет место соотношение

$$dS = \frac{PdV}{T}, \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что в данном процессе энтропия растет с расширением газа, поэтому этот процесс *необратим*. Например, если медленно вдвигая поршень в цилиндр, расширившийся газ адиабатически вернуть к первоначальному объему $dV_1 = -dV$, то с учетом постоянства энтропии при адиабатическом процессе для изменения энергии (2.6) и (4.1) получим $dE = PdV$. То есть при возврате к первоначальному объему энергия газа увеличится, что выразится в увеличении его температуры. Последнее утверждение следует из (2.14) с учетом положительности теплоемкости C_V .

4.2. Цикл Карно

Рассмотрим обратимый круговой процесс, состоящий из двух адиабатических и двух изотермических процессов, названный в честь описавшего его в 1832 году французского ученого и инженера Сади Карно (1796–1832). Цикл Карно, имеющий фундаментальное значение в технике, дает возможность получения работы из тепловой энергии, что и происходит в тепловых двигателях. Тепловой двигатель представляет собой два термостата, имеющие различающиеся температуры, которыми обменивается теплом рабочее тело, производящее работу. Термостат с более высокой температурой называется *нагревателем*, а с более низкой температурой – *холодильником*. Поскольку в циклах рабочее тело периодически возвращается в исходное состояние, достаточно проследить за изменением состояния термостатов.

Из закона сохранения энергии и предположения, что система замкнутая, следует, что работа, произведенная рабочим телом за цикл, равна

$$dR = -(dE_1 + dE_2), \quad (4.2)$$

где dE_1 и dE_2 – изменения за цикл энергии нагревателя и холодильника, соответственно.

Поскольку объем термостатов неизменен, то из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} dE_1 &= T_1 dS_1, \\ dE_2 &= T_2 dS_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Коэффициентом полезного действия (КПД) машины называется отношение совершенной работы dR к затраченной энергии $-dE_1$, который с учетом (4.2) и (4.3) равен

$$\eta = \frac{dR}{-dE_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{dS_2}{(-dS_1)}. \quad (4.4)$$

Поскольку нагреватель отдает энергию, величины dE_1 и dS_1 отрицательны. В силу второго начала термодинамики $dS_1 + dS_2 \geq 0$ или $dS_2 \geq -dS_1$. Тогда из (4.4) следует, что максимально возможный КПД

достигается при сохранении энтропии системы $dS_1 + dS_2 = 0$, т. е. для обратимого цикла Карно.

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (4.5)$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника, соответственно.

Обратимые процессы, происходящие в цикле Карно с рабочим телом: 1. изотермическое расширение при получении газом тепла от нагревателя (газ совершает работу, его энтропия возрастает); 2. адиабатическое расширение (газ совершает работу, его энтропия остается постоянной); 3. изотермическое сжатие газа при передаче им тепла холодильнику (над газом совершается работа, его энтропия уменьшается); 4. адиабатическое сжатие газа при обратном ходе поршня (над газом совершается работа, его энтропия остается постоянной) (рис. 4.3).

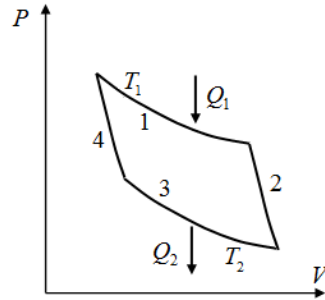


Рисунок 4.3

Лекция 5. Связь термодинамики со статфизикой. Статистические распределения в классической физике

5.1. Температура и свободная энергия в распределении Гиббса

Установим связь между константами A и β в распределении Гиббса (1.6) и термодинамическими величинами, введенными в лекции 2, иными словами, перебросим «мост» между статистической физикой и термодинамикой. Вывод удобнее провести для квантового случая, в этом случае условие нормировки (1.2) имеет вид

$$\sum_n w_n = 1, \quad (5.1)$$

где w_n – вероятность (1.8) того, что подсистема находится n -ом состоянии.

Подставляя квантовое распределение Гиббса (1.7), записанное через константу β , находим константу A .

$$A = \frac{1}{\sum_n e^{-\beta E_n}}. \quad (5.2)$$

Как уже говорилось в лекции 1, для макроскопической системы отклонение значений энергии E_n от среднего значения \bar{E} в среднем относительно невелико, поэтому в условии (5.1) можно заменить суммирование умножением величины $w(\bar{E})$ на число возможных для данной макроскопической системы микроскопических состояний Γ (1.10)

$$w(\bar{E})\Gamma = 1. \quad (5.3)$$

Отсюда, используя определение энтропии (1.8) и (1.9), получим

$$S = -\ln w(\bar{E}) = -\ln A + \beta \bar{E}. \quad (5.4)$$

Вычислим дифференциал энтропии, используя (5.2) и (5.4) и учитывая, что \bar{E} есть макроскопическая энергия тела E .

$$dS = d \ln \sum_n e^{-\beta E_n} + E d\beta + \beta dE = -A \left(\sum_n E_n e^{-\beta E_n} \right) d\beta + E d\beta + \beta dE = \beta dE. \quad (5.5)$$

В (5.5) учтено, что $A \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \sum_n E_n w_n$ – это в квантовом случае по (1.3) средняя энергия \bar{E} .

Сравнивая (5.5) с (2.6) и учитывая, что при получении (5.5) внешние условия, в частности, объем тела, полагались неизменными, получим приводившееся в лекции 1 без доказательства равенство $\beta = \frac{1}{T}$.

Из (5.4) $T \ln A = E - TS$ с учетом определения (2.15) свободной энергии

$$T \ln A = F. \quad (5.6)$$

Используя (5.2), получим формулу, которая является основой для вычисления термодинамических функций методами статфизики

$$F = -T \ln \sum_n e^{-\frac{E_n}{T}} = -T \ln Z, \quad (5.7)$$

где величина

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{T}} \quad (5.8)$$

называется *статистической суммой*.

В случае применимости классической механики статистическая сумма заменится *статистическим интегралом*

$$Z = (2\pi\hbar)^{-s} \int e^{-\frac{E(p,q)}{T}} dp dq. \quad (5.9)$$

Получим *распределение Гиббса* в случае *переменного числа* частиц в системе и его связь с термодинамическими величинами. По тем же соображениям, что и при выводе распределения (1.6), распределение в этом случае имеет вид $\rho = Ae^{-\beta E + \alpha N}$, где α и β – константы. Рассматривая дифференциал энтропии аналогично (5.4) и (5.5) и сравнивая с дифференциальным соотношением (2.9), получим $\beta = \frac{1}{T}$ и $\alpha = \frac{\mu}{T}$. Следовательно, искомое распределение (*большое каноническое распределение*) в квантовом виде есть

$$w_{n,N} = Ae^{\frac{\mu N - E_{n,N}}{T}}. \quad (5.10)$$

Индексы в $E_{n,N}$ означают, что энергия n -ого состояния системы сама зависит от количества частиц.

Из формулы, аналогичной (5.4), вместо (5.6) с учетом определения (2.26) Ω -потенциала получаем выражение

$$T \ln A = E - TS - \mu N = \Omega. \quad (5.11)$$

Повторяя вывод, аналогичный выводу формул (5.7) и (5.8), с учетом суммирования и по N в условии нормировки (5.1), получаем выражение для Ω -потенциала

$$\Omega = -T \ln Z, \quad (5.12)$$

где

$$Z = \sum_N e^{\frac{\mu N}{T}} \sum_n e^{-\frac{E_{n,N}}{T}}. \quad (5.13)$$

5.2. Распределение Максвелла

Рассмотрим более подробно распределение Гиббса в классическом пределе (1.1) и (1.7), когда энергия может быть представлена как сумма кинетической и потенциальной энергий $E(p, q) = K(p) + U(q)$. Тогда

$$dw = Ae^{-\frac{K(p)}{T} - \frac{U(q)}{T}} dp dq, \quad (5.14)$$

где вероятность зависит от двух множителей, один из которых зависит только от импульсов p , другой – только от координат q . Это означает, что вероятности для импульсов и координат независимы друг от друга. Таким образом, вероятность различных значений импульсов может быть записана в виде

$$dw_p = ae^{-\frac{K(p)}{T}} dp, \quad (5.15)$$

а вероятность значений координат

$$dw_q = be^{-\frac{U(q)}{T}} dq, \quad (5.16)$$

где a и b – константы, которые должны быть найдены из условий нормировки

$$\begin{aligned} \int dw_p &= 1, \\ \int dw_q &= 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Поскольку кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий каждого из входящих в него атомов $K(q) = \sum_a \frac{p_a^2}{2m}$, при этом

считаем для простоты, что все атомы имеют одинаковую массу m , то вероятность опять разбивается на произведение множителей, каждый из которых зависит только от импульсов отдельных атомов, то есть эти вероятности независимы друг от друга.

Для распределения вероятностей импульсов отдельного атома из (5.15) получим

$$dw_p = (2\pi mT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mT}\right] dp_x dp_y dp_z. \quad (5.18)$$

Постоянный множитель вычислен из условия нормировки (5.17) с помощью известной формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Переходя от импульсов к скоростям ($\vec{p} = m\vec{v}$), для распределения вероятностей скоростей отдельных атомов получим

$$dw_v = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-m \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2T}\right] dv_x dv_y dv_z. \quad (5.19)$$

Выражение (5.19), установленное английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879) в 1860 году носит название *распределение Максвелла по скоростям*. Оно снова распадается на произведение трех независимых множителей, каждый из которых определяет распределение вероятностей для отдельной компоненты скорости.

$$\begin{aligned} dw_{v_x} &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2T}\right] dv_x, \\ dw_{v_y} &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{mv_y^2}{2T}\right] dv_y, \\ dw_{v_z} &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{mv_z^2}{2T}\right] dv_z, \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.3. Распределение Больцмана

Распределение вероятностей координат отдельных частиц тела не может быть записано в общем случае из (5.16) в простом виде, поскольку потенциальная энергия взаимодействия частиц не распадается на сумму слагаемых, каждое из которых зависит от координаты только одной частицы. Исключение составляет случай *идеального газа* – макроскопической системы, в которой взаимодействием между частицами можно пренебречь. В этом случае

$$E(p, q) = \sum_a \varepsilon_a(p, q),$$

где энергия отдельного атома

$$\varepsilon_a(\vec{p}_a, \vec{q}_a) = \frac{p_a^2}{2m} + U(\vec{r}_a), \quad (5.21)$$

а $U(\vec{r}_a)$ – потенциал внешнего поля. Тогда из (5.16) для вероятностей координат отдельной частицы имеем

$$dw_r = be^{-\frac{U(\vec{r})}{T}} dxdydz. \quad (5.22)$$

Это одна из форм записи *распределения Больцмана*, которое было предложено австрийским физиком Людвигом Больцманом (1844–1906) в 1871 году.

Для плотности идеального газа из (5.22) следует

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{U(\vec{r})}{T}}, \quad (5.23)$$

где n_0 – константа.

Для газа в поле тяжести Земли $U = mgh$, где h – высота над поверхностью Земли, а m – масса молекулы газа, имеем *барометрическую формулу*

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{T}},$$

где n_0 – плотность газа на поверхности Земли.

Еще раз отметим, что распределения Максвелла и Больцмана относятся к случаю применимости классической механики, причем второе – исключительно к случаю идеального газа.

5.4. Классический газ. Уравнение состояния идеального газа

Формула (5.22) для энергии отдельной частицы идеального газа предполагает, что частицей, не вступающей во взаимодействие с другими частицами, является атом, а значит, речь идет об *одноатомном* газе.

Если же молекула газа состоит из нескольких атомов, то вместо (5.21) запишем

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon' + U(\vec{r}), \quad (5.24)$$

где ε' – внутренняя энергия молекулы массы m .

Поскольку полная энергия идеального газа есть сумма энергий отдельных молекул, из формулы (5.9) для статистического интеграла, казалось бы, следует, что $Z = z^N$, где N – число молекул в рассматриваемом объеме, а

$$z = (2\pi\hbar)^{-s} \int e^{\frac{\varepsilon a}{T}} dp_a dq_a, \quad (5.25)$$

«малый» статистический интеграл, в котором интегрирование идет по фазовому пространству отдельной молекулы. Однако следует учесть, что перестановка одинаковых частиц приводит систему к тому же самому состоянию, поэтому выражение для Z следует разделить еще на количество всех перестановок молекул $N!$. По формуле Стирлинга для факториала большого числа $N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$, а для Z получим

$$Z = \left(\frac{ez}{N}\right)^N, \quad (5.26)$$

а для z из выражений (5.24) и (5.25) в отсутствие внешнего поля получим

$$z = (2\pi\hbar)^{-3} z' \int \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mT}\right) dp_x dp_y dp_z = V \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} z', \quad (5.27)$$

где
$$z' = (2\pi\hbar)^{-s'} \int e^{-\frac{\varepsilon'}{T}} dp' dq'.$$

Интегрирование по $dp' dq'$ здесь – это интегрирование по s' внутренним степеням свободы молекулы, а при интегрировании по $dp_x dp_y dp_z$ применена вышеприведенная формула интегрирования.

Для свободной энергии газа получаем

$$F = -T \ln Z = -TN \ln \frac{ez}{N} = -NT \left\{ \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] + \ln z' \right\}. \quad (5.28)$$

Давление газа по (2.6) $P = -\frac{dF}{dV} = \frac{NT}{V}$, из чего получается известное уравнение состояния идеального газа

$$PV = NT. \quad (5.29)$$

5.5. Закон равнораспределения

Если, пренебрегая квантовыми эффектами, рассматривать составляющие молекулу атомы как классические точечные частицы, отвлекаясь от их внутренней структуры, то энергию ε' в (5.24) можно записать в виде

$$\varepsilon' = \sum_i (a_i p_i'^2 + b_i q_i'^2). \quad (5.30)$$

Здесь суммирование ведется по внутренним степеням свободы молекулы: вращательным (молекула может вращаться как целое) и колебательным (атомы могут колебаться около положений равновесия). Слабые в скобках соответствуют кинетической и потенциальной энергиям атомов при вращении и колебаниях молекулы: кинетическая является

квадратичной по импульсам частиц, а потенциальная энергия при гармонических колебаниях квадратичная по их смещениям q'_i из положений равновесия, а a_i и b_i – константы. Подставляя (5.30) в (5.27) и (5.28) имеем

$$z = BVT^{\frac{r}{2}}, \quad F = -NT \left(\ln B \frac{V}{N} + \frac{r}{2} \ln T \right). \quad (5.31)$$

Для вычислений применена приведенная выше формула интегрирования; выражение для константы B не выписываем. Число r – это число переменных p' и q' , от которых зависит энергия в (5.30) (с учетом кинетической энергии центра тяжести молекулы).

Для n -атомной молекулы, если $n > 2$ и молекула не линейная, $r = 6n - 6$, поскольку из полного количества переменных p' и q' в количестве $6n$ нужно вычесть 6, т. е. 3 координаты центра масс молекулы и 3 угла поворота молекулы как целого, от этих переменных энергия не зависит.

Если молекула линейная, а при $n = 2$ она неизбежно такая, то ее ориентация в пространстве характеризуется только двумя углами и 3 координатами центра масс молекулы, поэтому $r = 6n - 5$.

Наконец, для одноатомной молекулы $r = 3$, поскольку энергия зависит только от трех компонент ее импульса.

Зная свободную энергию, находим другие термодинамические величины идеального газа. Из (2.16) имеем

$$S = -\frac{dF}{dT} = N \left(\ln B \frac{V}{N} + \frac{r}{2} \ln T \right) + N \frac{r}{2}. \quad (5.32)$$

Из (2.15)

$$E = F + TS = \frac{r}{2} NT. \quad (5.33)$$

Из (2.11) и (5.29)

$$W = E + PV = \left(\frac{r}{2} + 1 \right) NT. \quad (5.34)$$

А из (2.13) и (2.14) получаем

$$\frac{C_V}{N} = \frac{r}{2}, \quad \frac{C_P}{N} = \frac{C_V}{N} + 1. \quad (5.35)$$

Таким образом, теплоемкость идеального классического газа постоянна и подчиняется *закону равнораспределения*: каждая переменная, от которой зависит энергия молекулы, вносит вклад $\frac{1}{2}$ в теплоемкость C_V , отнесенную к одной молекуле (и вклад в энергию $\frac{NT}{2}$). В общем курсе физики обычно неточно говорится, что этот вклад вносит каждая степень свободы, но реальная ситуация, как мы увидели, несколько сложнее. Кроме того, если температура измеряется в Кельвинах, то правые части равенств (5.35) следует умножить на постоянную Больцмана k .

5.6. Отклонение газов от идеальности.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

Для неидеального газа следует учитывать потенциальную энергию взаимодействия между молекулами $E(p, q) = \sum_a \varepsilon_a + \sum_{ab} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$, где ε – энергия отдельной молекулы (5.6). Если для идеального газа интегрирование по координатам отдельных молекул при вычислении статистического интеграла (5.9) сводилось просто к умножению на V^N , поскольку энергия от координат молекул не зависела, то теперь имеет место замена V^N на интеграл

$$\int \exp \left[-\frac{\sum_{ab} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{T} \right] dV_1 dV_2 \dots dV_N$$

и поэтому свободную энергию можно переписать в виде

$$F = F_{uo} - T \ln \left\{ \frac{1}{V^N} \int \exp \left(\frac{-\sum_{ab} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{T} \right) - 1 \right\} dV_1 dV_2 \dots dV_N + 1 \right\}, \quad (5.39)$$

где F_{uo} – свободная энергия идеального газа, а единица под интегралом вычтена для удобства.

ЛЕКЦИЯ 6. Квантовый газ

6.1. Квантовый газ. Распределение Ферми-Дирака

В лекции 6КМ был сформулирован принцип Паули: в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы с полуцелым спином. Такой частицей, фермионом, является, в частности, электрон. Чтобы определить статистику невзаимодействующих между собой фермионов, рассмотрим Ω -потенциал (2.26) k -ого состояния отдельной частицы газа. Тем самым мы предполагаем квантовое состояние подсистемой макроскопической системы (газа), взаимодействием которой с остальной системой можно пренебречь. Последнее справедливо, поскольку рассматривается идеальный газ. Из (5.12) имеем

$$\Omega_k = -T \ln \sum_{n_k} e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T} n_k}, \quad (6.1)$$

где n_k — число частиц в k -ом состоянии, ε_k — энергия одной частицы в этом состоянии, $n_k \varepsilon_k$ — энергия n_k частиц.

Согласно принципу Паули число n_k может принимать только два значения 0 и 1. Поэтому

$$\Omega_k = -T \ln \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}} \right) \quad (6.2)$$

и, пользуясь (2.27), находим среднее число частиц в k -ом состоянии

$$n_k = -\frac{d\Omega_k}{d\mu} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}} + 1}. \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) представляет собой *распределение Ферми*, полученное итало-американским физиком, лауреатом Нобелевской премии 1938 года Энрико Ферми (1901–1954) в 1926 году. Поскольку аналогичные работы были одновременно проведены английским физиком, лауреатом Нобелевской премии 1933 года Полем Дираком (1902–1984), то распределение зачастую называют *распределением Ферми-Дирака*.

Считая газ слабонеидеальным, т. е. достаточно разреженным, так что на расстояние сильного взаимодействия друг с другом молекулы сближаются редко, оставим в сумме в экспоненте в (5.39) только одно слабое, учитывающее возможность сближения только одной пары молекул

$$F \approx F_{ид} - \frac{TN^2}{2V^2} \int \left[\exp \left(\frac{-U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{T} \right) - 1 \right] dV_1 dV_2.$$

В этом выражении также учтено, что выбрать пару молекул из N можно $\frac{N(N-1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$ способами, и применена формула $\ln(1+x) \approx x$ при $x \ll 1$. Поскольку U зависит только от разности координат, можно произвести интегрирование по одной из них и окончательно получить

$$F \approx F_{ид} + \frac{N^2 T}{V} B(T), \quad B(T) = \frac{1}{2} \int \left(1 - e^{\frac{U(\vec{r})}{T}} \right) dV. \quad (5.40)$$

Используя формулу $P = -\frac{dF}{dV}$, получаем *уравнение состояния слабонеидеального газа*

$$P = \frac{NT}{V} \left[1 + \frac{N}{V} B(T) \right]. \quad (5.41)$$

Голландским физиком, лауреатом Нобелевской премии 1910 года Яном Ван-дер-Ваальсом (1837–1923) в 1881 году предложено уравнение состояния (*уравнение Ван-дер-Ваальса*)

$$\left(P + \frac{N^2 a}{V^2} \right) (V - Nb) = NT, \quad (5.42)$$

где a и b — константы.

Это уравнение имеет интерполяционный смысл: при малой плотности газа $\frac{N}{V}$ оно не противоречит (5.41), а с увеличением плотности описывает переход от газа к жидкости.

Для классического идеального газа среднее число частиц в интервале d^3p согласно (4.2) и (4.5) равно

$$dn_p = ae^{-\frac{\varepsilon_p}{T}} d^3p. \quad (6.4)$$

Величина a не зависит от ε_p , т. к. среднее число частиц пропорционально вероятности их обнаружения, поэтому роль величины n_k играет $ae^{-\frac{\varepsilon_p}{T}}$. Следовательно, переход от квантового распределения (6.3) к классическому (6.4) имеет место при $e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}} \ll 1$, когда единицей в знаменателе (6.3) можно пренебречь. Из этого неравенства также следует, что в классическом пределе $n_k \ll 1$, и понятно, что при этом принцип Паули не играет роли, поскольку две частицы встретить в одном состоянии и так маловероятно.

Распределение Ферми нормировано условием

$$\sum_k n_k = N, \quad (6.5)$$

где N – полное число частиц в системе.

Это равенство в неявном виде определяет химический потенциал μ как функцию T и N .

Ферми-газ называют *вырожденным*, если $T \ll \mu$ (в обратном случае, *невырожденным*). Как видно из (6.3), распределение Ферми в случае вырождения имеет вид «ступеньки», область размытия которой по переменной ε_k порядка T (рис. 4.4). Квантовые свойства Ферми-газа наиболее выражены в случае вырождения.

Если положить $T = 0$, то химический потенциал – это наибольшая энергия занятого частицей состояния. Эту энергию называют *энергией Ферми* $\varepsilon_F = \mu$ при $T = 0$.

Уравнение $\varepsilon_p = \varepsilon_F$ определяет некоторую поверхность в пространстве импульсов, называемую *поверхностью Ферми*, внутри которой все состояния

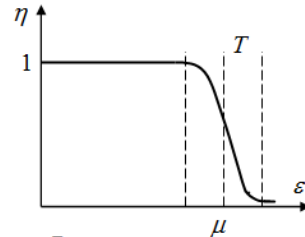


Рисунок 4.4

заняты при $T = 0$, вне – свободны. Если $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ (свободные частицы), то поверхность Ферми – сфера радиуса $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$. Этот максимальный импульс частиц p_F называется *импульсом Ферми*.

Вычислим плотность частиц, соответствующую заданному химическому потенциалу μ при $T = 0$. Объем импульсного пространства внутри сферы Ферми равен $\frac{4p_F^3}{3}$. На элемент фазового объема dVd^3p одной частицы

согласно (1.10) приходится $\frac{dVd^3p}{(2\pi\hbar)^3}$ состояний. Поэтому плотность частиц

$$\frac{N}{V} = \frac{g(2m\mu)^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2\hbar^3}, \quad (6.6)$$

где g – число возможных значений проекции спина частицы (при спине $\frac{1}{2}$ $g = 2$).

6.2. Распределение Бозе-Эйнштейна

Бозоны – частицы с целым значением спина, подчиняющиеся статистике, которую разработали индийский физик Шатъендранат Бозе (1894–1974) и лауреат Нобелевской премии 1921 года Альберт Эйнштейн (1879–1955) в 1924–1925 гг.

В случае бозонов числа частиц n_k в (6.1) могут принимать любые целые значения и, суммируя геометрическую прогрессию, получим

$$\Omega_k = T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}} \right). \quad (6.7)$$

Отсюда получаем *распределение Бозе* (или *Бозе-Эйнштейна*)

$$n_k = -\frac{d\Omega_k}{d\mu} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}} - 1}. \quad (6.8)$$

При положительном μ выражение (6.8) теряло бы смысл при $\varepsilon < \mu$, поэтому для Бозе-газа

$$\mu \leq 0. \quad (6.9)$$

6.3. Теплоемкость идеального электронного газа

Суммируя (6.2) по всем квантовым состояниям, которые для газа есть состояния частиц с импульсом \vec{p} , получаем Ω -потенциал электронного газа

$$\Omega = -\frac{2TV}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_{\vec{p}}}{T}} \right) d^3 p. \quad (6.10)$$

В выражении (6.10) мы уже перешли от суммирования по дискретным состояниям к интегрированию по фазовому объему $d^3 p dV$, зная число дискретных состояний в элементе фазового объема (1.10), а дополнительный множитель 2 возник для учета двух возможных проекций спина электрона. Интегрирование по dV привело просто к умножению на объем системы V . В (6.10) удобно перейти от интегрирования по $d^3 p$ к интегрированию по энергии $\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m}$ и по телесному углу вектора \vec{p} : $d^3 p = m\sqrt{2m\varepsilon} d\varepsilon d\Omega$. А поскольку от углов зависимость отсутствует, то интегрирование по $d\Omega$ сводится к умножению на 4π .

$$\Omega = \frac{2VT}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi m \sqrt{2m} \int_0^\infty \ln \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon}{T}} \right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

Для дальнейшего вычисления удобно дважды произвести интегрирование по частям

$$\Omega = \frac{4V}{15\pi^2\hbar^3} \sqrt{2m^3} \int_0^\infty \frac{dn}{d\varepsilon} \varepsilon^{\frac{5}{2}} d\varepsilon. \quad (6.11)$$

Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем вырожденного электронного газа. Производная $-\frac{dn}{d\varepsilon}$ имеет в этом случае вид узкого высо-

кого колокола, симметричного относительно точки $\varepsilon = \mu$ (рис. 4.5), почти δ -функции. Поэтому естественно разложить множитель $\varepsilon^{\frac{5}{2}}$ под интегралом в ряд по степеням отклонения от этой точки

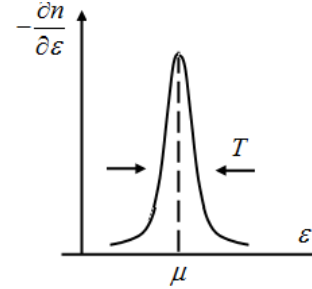


Рисунок 4.5

$$\varepsilon^{\frac{5}{2}} = \mu^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} \mu^{\frac{3}{2}} (\varepsilon - \mu) + \frac{15}{8} \mu^{\frac{1}{2}} (\varepsilon - \mu)^2 + \dots$$

Интеграл с первым слагаемым дает величину, не содержащую T , это значение Ω -потенциала при $T=0$ обозначим Ω_0 . Интеграл со вторым слагаемым равен нулю, поскольку подынтегральное выражение антисимметрично относительно точки $\varepsilon = \mu$. Итак

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{2m^3} \mu \int_0^\infty \left(-\frac{dn}{d\varepsilon} \right) (\varepsilon - \mu)^2 d\varepsilon.$$

При переходе к интегрированию по переменной $\xi = \frac{\varepsilon - \mu}{T}$ интеграл становится безразмерным. В результате получаем

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{VT^2}{6\hbar^3} \sqrt{2m^3} \mu. \quad (6.12)$$

При вычислении было использовано известное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{e^\xi + 1} \right)' \xi^2 d\xi = \frac{\pi^2}{3}.$$

Нижний предел $-\frac{\mu}{T}$ здесь заменен на $-\infty$. Это возможно, поскольку

при $\xi < -\frac{\mu}{T}$ подынтегральное выражение исчезающее мало.

Формула (6.12) определяет изменение Ω -потенциала с температурой при постоянном химпотенциале μ . В реальных же условиях с измене-

нием температуры постоянным остается не химпотенциал, а полное число частиц в системе N . Термодинамической функцией относительно переменных T и N является свободная энергия (лекция 2). Поэтому найденное изменение с температурой следует отнести именно к этой функции. В противном случае пришлось бы к правой части (6.12) добавлять слагаемое $-Nd\mu$, где $d\mu$ – изменение химпотенциала с температурой

$$F = F_0 - \frac{VT^2}{6\hbar^3} \sqrt{2m^3\mu}. \quad (6.13)$$

Отсюда по (2.16) находим энтропию газа

$$S = -\frac{dF}{dT} = \frac{VT}{3\hbar^3} \sqrt{2m^3\mu}$$

и по (2.10) теплоемкость

$$C = \frac{TdS}{dT} = \frac{\pi^2}{2} N \left(\frac{T}{\mu} \right). \quad (6.14)$$

Здесь также использовано соотношение (6.6). Различие между C_V и C_P в случае вырождения оказывается малым.

Результат (6.14) показывает, что в квантовом случае не соблюдается закон равнораспределения (5.35). Теплоемкость на одну частицу примерно в T/μ раз меньше, чем в классике. Причина такого положения легко усматривается из формулы (6.11): «работает» только область вблизи точки $\varepsilon = \mu$ шириной T . Эта точка называется *уровнем Ферми*. Степени же свободы полностью заполненных состояний, как говорят, «заморожены». Именно по этой причине мы могли отвлекаться от внутреннего строения атомов: составляющие их частицы в большей степени являются квантовыми, и их степени свободы нередко заморожены.

ЛЕКЦИЯ 7. Конденсированные тела

7.1. Явление Бозе-конденсации

Как было показано в лекции 5, частицы Ферми-газа при $T = 0$ занимают все состояния с энергией вплоть до уровня Ферми μ . Поскольку для Бозе-газа принцип Паули отсутствует, при $T = 0$ все частицы занимают наинизшее энергетическое состояние с $\varepsilon = 0$, соответственно, и полная энергия Бозе-газа $E = 0$ при $T = 0$. Покажем, что подобное положение имеет место не только при $T = 0$.

Пусть в объеме V находится N частиц идеального Бозе-газа. Условие нормировки

$$\sum_k \bar{n}_k = N, \quad (7.1)$$

где \bar{n}_k – распределение Бозе (6.8), определяющее зависимость химпотенциала от температуры.

Заменяя суммирование интегрированием, как это делалось в лекции 6 и считая спин частицы равным 0, имеем

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi m \sqrt{2m} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = N. \quad (7.2)$$

Из (7.2) видно, что с уменьшением температуры T левая часть равенства уменьшается, а с увеличением μ – растет. Таким образом, чтобы N оставалось неизменным, μ должно расти с уменьшением T , но его рост ограничен значением $\mu = 0$ (6.9). Подставляя в (7.2) $\mu = 0$ и используя равенство $\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} \sqrt{x} dx \approx 2.4$, находим температуру T_0 , соответствующую этому значению химпотенциала

$$T_0 \approx \frac{3,31\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.3)$$

При $T < T_0$ уравнение (7.2) не имеет решений, поскольку дальнейшее увеличение μ невозможно и левая часть оказывается меньше правой.

Но решение имеет уравнение (7.1): «лишние» частицы $N - N_{\varepsilon>0}$ могут быть размещены на нижнем уровне с $\varepsilon = 0$ (один член суммы в (7.1)). $N_{\varepsilon>0}$ – это частицы с не равной нулю энергией, число которых определяется распределением Бозе с $\mu = 0$:

$$N_{\varepsilon>0} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi m \sqrt{2m} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (7.4)$$

Таким образом, при $T < T_0$ имеет место явление *Бозе-конденсации*: макроскопическое число частиц $N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$ оказываются на одном квантовом уровне, иными словами, выпадают в *Бозе-конденсат*. А поскольку их энергия равна нулю, то они не вносят вклад в теплоемкость газа.

7.2. Твердые тела. Фононы

При самых низких температурах почти все вещества в состоянии термодинамического равновесия находятся в кристаллическом состоянии. Если исключить перемещение кристалла и его вращение как целого, то у кристалла все координатные степени свободы – колебательные, а их число соответствует числу координатных степеней свободы частиц, образующих кристалл, $3N\nu$, где N – число молекул в кристалле, а ν – число атомов в молекуле. Столько же имеется импульсных степеней свободы. Поэтому по закону равнораспределения (5.35), используемому в случае применимости классической механики, теплоемкость

$$C = 3N\nu. \quad (7.5)$$

Различие между C_V и C_P для твердого тела несущественно. В применении к твердому телу результат (7.5) называется *законом Дюлонга и Пти* (или *законом постоянства теплоемкости*), установленным французскими учеными Пьером Дюлонгом (1785–1838) и Алексисом Пти (1791–1820) в 1819 году. Проанализируем, при каких условиях этот закон справедлив.

Как известно из курса квантовой механики, энергия колебаний квантуется. Квант энергии колебаний равен $\hbar\omega$, где ω – частота колебаний. Кванты колебания кристаллической решетки называют *фононами*. Фонон можно рассматривать как частицу (*квазичастицу*) бозон. Спин фонона равен 0, поскольку возбуждение колебания не создает в кристалле момент количества движения.

Фононы с хорошей точностью можно считать газом невзаимодействующих частиц (идеальным газом), поэтому энергия колебаний является суммой энергий отдельных фононов

$$E = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right). \quad (7.6)$$

Здесь использована формула (КМ4.18) для энергии осциллятора с дополнительным суммированием по волновым векторам колебаний: каждое колебание в кристалле является волной со своим волновым вектором, n_k – число фононов с волновым вектором \vec{k} . Наконец, поскольку фононы вне кристалла не существуют, нет смысла говорить об изменении энергии кристалла при внесении в него этой частицы. Эта величина по определению есть химпотенциал (2.19), поэтому для фононов $\mu = 0$. По формуле (5.23) для Ω -потенциала газа фононов имеем

$$\Omega = T \sum_k \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_k}{T} \right) \right]. \quad (7.7)$$

Рассмотрим случай предельно низких температур. При этом в сумме в (7.7) играют роль только низкие частоты $\hbar\omega_k \approx T$, фононы более высокой частоты «вымерзают», т. е. вероятность их появления крайне низка. Как известно, низкочастотные колебания кристалла – это обычные звуковые волны. Частота продольной волны $\omega = u_l k$, частота двух поперечных звуковых ветвей $\omega = u_t k$, u_l и u_t – скорости продольного и поперечного звука соответственно. Переходя в (7.7) от суммирования по \vec{k} к интегрированию с множителем $\frac{V}{(2\pi)^3}$, затем к интегрированию по

$d\omega$; $d^3k = \frac{\omega^2}{u^3} d\omega d\Omega$ интегрирование по $d\Omega$ дает множитель 4π , получаем для одной из поляризаций звука

$$\Omega = \frac{TV}{2\pi^2 u^3} \int_0^\infty \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} \right) \omega^2 d\omega.$$

Этот интеграл становится безразмерным при замене $\frac{\hbar\omega}{T} = \xi$, затем интегрированием по частям получаем

$$\Omega = -\frac{V\pi^2 T^4}{90(\hbar u)^3}.$$

Здесь учтено, что $\int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi = \frac{\pi^4}{15}$. Складывая результаты для всех трех поляризаций звука, и учитывая, что при $\mu = 0$ Ω -потенциал совпадает со свободной энергией (2.24), имеем

$$F = -\frac{V\pi^2 T^4}{30(\hbar \bar{u})^3},$$

$$S = -\frac{dF}{dT} = \frac{2V\pi^2 T^3}{15(\hbar \bar{u})^3},$$

$$\frac{3}{\bar{u}^3} = \frac{1}{u_l^3} + \frac{2}{u_t^3}.$$

Откуда

$$C = \frac{TdS}{dT} = 2\pi^2 \frac{VT^3}{5(\hbar \bar{u})^3}. \quad (7.8)$$

Результат, что теплоемкость пропорциональна кубу абсолютной температуры, $C \sim T^3$, для твердого тела при низких температурах впервые получен голландским физиком, лауреатом Нобелевской премии за 1936 год Петером Дебаем (1884–1966) в 1912 году. Он резко отличается от закона Дюлонга и Пти (7.5). Чтобы проанализировать различие, введем так называемую *температуру Дебая* Θ :

$$\Theta = \left(\frac{Nv}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \hbar u \approx \frac{\hbar u}{a}, \quad (7.9)$$

где a – межатомное расстояние в кристалле.

Результат (7.8) по порядку величины можно записать как $C \approx C_{ДП} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3$, где $C_{ДП}$ – теплоемкость по Дюлонгу и Пти. Теплоемкость C становится одного порядка с $C_{ДП}$ при $T \approx \Theta$. При этом длина волны невымерзших фононов $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi u}{\omega} \approx \frac{u\hbar}{T} \approx \frac{u\hbar}{\Theta} \approx a$. Следовательно, при температуре Дебая в кристалле присутствуют все возможные фононы, поскольку колебания решетки с длиной волны $\lambda < a$ невозможны. Поскольку при выводе (7.8) мы не учитывали ограничения $\lambda < a$, то результат Дебая (7.8) справедлив при низких температурах $T \ll \Theta$, когда большинство из возможных фононов вымерзли, а остались только длинноволновые фотоны, и поэтому $C \ll C_{ДП}$. Температура Дебая, как правило, порядка 100 К.

Покажем, что при $T \gg \Theta$ справедлив закон Дюлонга и Пти, использующий закон равнораспределения. Это естественно, поскольку в этой области температур ситуация соответствует классической механике, а именно, все степени свободы кристалла не выморожены. Доказывать можно непосредственно из (7.7), но проще рассуждать следующим образом. При $T \gg \Theta$ температура превышает все частоты колебаний $T \gg \hbar\omega_{\vec{k}}$.

$$n_{\vec{k}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{T}\right) - 1} \approx \frac{T}{\hbar\omega_{\vec{k}}}.$$

Средняя энергия этого колебания $\hbar\omega_{\vec{k}} \bar{n}_{\vec{k}} \approx T$, что соответствует закону равнораспределения энергии (на одно колебание приходится две степени свободы, от которых зависит энергия: сдвиг частицы из положения равновесия и ее импульс).

7.3. Квантовые жидкости. Сверхтекучесть

Существуют жидкости, которые при обычных давлениях не кристаллизуются вплоть до сколь угодно низких температур из-за квантовых эффектов. Воображаемый кристалл из атомов такого вещества будет и при $T = 0$ разрушен нулевыми колебаниями атомов (лекция 4 КМ), поскольку взаимодействие между ними достаточно слабое. Примером такого вещества является гелий. Поскольку суммарный спин всех частиц, составляющих атом ^4He , является целым числом, т. е. содержит четное количество фермионов, то атом ^4He является бозоном. Поэтому для жидкого гелия характерно явление Бозе-конденсации, наступающее при температуре 2,17К. Из-за взаимодействия между атомами в этой квантовой жидкости имеются колебательные степени свободы – продольные звуковые волны. В условиях Бозе-конденсации, когда все атомы находятся в одном квантовом состоянии, другие *возбуждения* системы (степени свободы, позволяющие изменять энергию системы) невозможны. Эти обстоятельства приводят к явлению *сверхтекучести* – протеканию жидкости по капиллярам без трения. Физическая причина сверхтекучести состоит в следующем. Чтобы затормозить движущуюся по капилляру жидкость, нужно возбудить хотя бы один фонон, импульс которого $\hbar k$ противоположен направлению движения. Но для этого нужно затратить энергию $\hbar\omega = \hbar uk$, что, как показал Ландау, энергетически невыгодно при небольших скоростях течения жидкости.

Примером Ферми-жидкости являются электроны в проводниках. При определенных условиях эти фермионы объединяются в пары, что приводит к явлению сверхпроводимости.

ЛЕКЦИЯ 8. Фазовые переходы

8.1. Фазы, условия их равновесия. Правило фаз Гиббса

В состоянии термодинамического равновесия тело не обязательно должно быть однородным, могут сосуществовать соприкасающиеся однородные его части, находящиеся в разных состояниях. Такие состояния называют различными *фазами вещества*.

Условия сосуществования (равновесия) некоторого количества фаз вещества включают полученные в лекции 2 условия равенства температур

$$T_1 = T_2 = \dots = T_n \quad (8.1)$$

и равенство давлений

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n, \quad (8.2)$$

которых являются условием механического равновесия системы. Аналогично выводу условия (8.1) покажем, что должно соблюдаться также условие равенства химических потенциалов

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n. \quad (8.3)$$

Оно следует из требования максимальности энтропии в состоянии равновесия: энтропия двух фаз $S = S_1 + S_2$, одно из необходимых условий максимума $-\frac{dS}{dN_1} = 0$, где N_1 – число частиц в первой фазе. Поскольку полное число частиц $N_1 + N_2 = N$ предполагается постоянным, то

$$\frac{dS}{dN_1} = \frac{dS_1}{dN_1} + \frac{dS_2}{dN_2} \frac{dN_2}{dN_1} = \frac{dS_1}{dN_1} - \frac{dS_2}{dN_2} = 0.$$

Но из (2.19) при постоянных E и V следует $\frac{dS}{dN} = -\frac{\mu}{T}$, откуда и получаем (8.3) для случая двух фаз.

Пусть состояние тела может быть задано двумя термодинамическими величинами: температурой и давлением. Тогда равновесие двух фаз этого вещества описывается уравнением (8.3) с двумя переменными P и T

$$\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T). \quad (8.4)$$

Решение этого уравнения – линия на диаграмме в плоскости $P-T$. Линия равновесия фаз является также линией фазового перехода. При ее пересечении в ходе какого-либо процесса с изменением температуры и/или давления происходит переход от одной фазы к другой.

Равновесие трех фаз вещества (два уравнения с двумя переменными) соответствует точке на $P-T$ -диаграмме, которая называется *тройной точкой* и является точкой пересечения линий сосуществования фаз попарно (рис. 4.6). На $P-T$ -диаграмме возможна также точка окончания линии фазового перехода (рис. 4.7) – *критическая точка*, в которой теряется различие между двумя фазами.

Очевидно, что при двух переменных, более 3-х фаз сосуществовать не могут. Но при рассмотрении растворов веществ друг в друге, появляются новые переменные – концентрации веществ и, как следствие, новые термодинамические потенциалы μ_{ik} i -ой компоненты раствора в k -ой фазе.

8.2. Правило фаз Гиббса

Установим правило, определяющее возможное количество сосуществующих фаз при произвольном числе переменных. Условия равновесия (8.1)–(8.3) теперь имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \mu_{12} = \dots = \mu_{1r}, \\ \mu_{21} &= \mu_{22} = \dots = \mu_{2r}, \\ \mu_{n1} &= \mu_{n2} = \dots = \mu_{nr}.\end{aligned}\tag{8.5}$$

Химпотенциалы каждой из n компонент раствора должны быть одинаковы во всех r сосуществующих фазах. Каждый химпотенциал μ_{ik} считается известной функцией давления P , температуры T и $(n-1)$ -ой концентрации компонент в этой фазе (одна из концентраций не является независимой, поскольку их сумма равна 1). Таким образом, уравнения (8.5) представляют собой систему из $n(r-1)$ уравнений, в который количество независимых переменных $r(n-1)+2$. Для того, чтобы эта система имела решения, число уравнений должно быть не больше, чем число переменных, т. е.

$$r \leq n + 2.\tag{8.6}$$

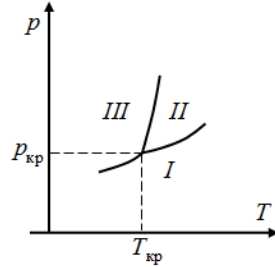


Рисунок 4.6

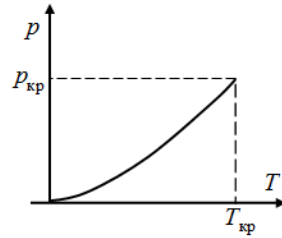


Рисунок 4.7

Правило фаз Гиббса: число сосуществующих фаз не больше, чем $n+2$. Если число фаз $r < n+2$, то в уравнениях (8.5) $(n+2-r)$ любых переменных можно менять произвольно, и равновесие при этом не нарушается. Число f

$$f = n + 2 - r\tag{8.7}$$

называется *числом термодинамических степеней свободы* системы.

8.3. Скрытая теплота перехода. Формула Клапейрона-Клаузиуса

Переход из одной фазы в другую сопровождается выделением или поглощением некоторого количества тепла. Действительно, равенство химпотенциалов фаз не означает равенство их энергий, поэтому для осуществления фазового перехода необходимо сообщать или удалять определенное количество энергии в виде тепла. Следует также принять во внимание, что при постоянном давлении тело в процессе перехода, вообще говоря, изменяет свой объем, а значит, совершается работа. Как показано в лекции 2, количество поглощаемого телом тепла при фиксированном давлении равно изменению его тепловой функции. Поэтому теплота перехода q , отнесенная к одной молекуле (для тел, состоящих из одного вещества, термодинамические функции, отнесенные к одной молекуле, обозначаем маленькими буквами)

$$q = w_2 - w_1,\tag{8.8}$$

где w_1 и w_2 – тепловые функции обеих фаз.

Поскольку μ – термодинамический потенциал, приходящийся на одну молекулу (2.24), условие равновесия двух фаз $\mu_1 = \mu_2$ с учетом (2.17) можно записать в виде

$$(w_2 - w_1) - T(s_2 - s_1) = 0,$$

откуда

$$q = T(s_2 - s_1),\tag{8.9}$$

где s_1 и s_2 – энтропии на одну молекулу в каждой из двух фаз.

При этом, $q > 0$, если при переходе из первой фазы во вторую тепло поглощается, и $q < 0$, если тепло выделяется.

На рис. 4.8 показаны зависимости химпотенциалов двух фаз в зависимости от температуры (при постоянном давлении), T_0 – точка фазового перехода. Можно показать, что в состоянии равновесия химпотенциал минимален, поэтому равновесными являются нижние части кривых. С понижением температуры переход происходит от фазы 1 к фазе 2. Поскольку в точке пересечения кривая 2 идет круче, то энтропия (2.18)–(2.23) первой фазы $s_1 = -\frac{d\mu_1}{dT}$ меньше, чем энтропия s_2 второй фазы. Следовательно, теплота перехода $q = T(s_2 - s_1)$ положительна. Из этого следует вывод, что при фазовом переходе с повышением температуры тепло поглощается, при понижении температуры – выделяется, что находится в полном соответствии с принципом Ле Шателье.

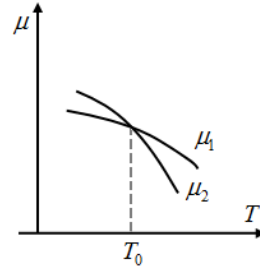


Рисунок 4.8

Продифференцируем обе стороны условия равновесия (8.4) по температуре, учитывая, что давление P есть функция температуры

$$\frac{d\mu_1}{dT} + \frac{d\mu_1}{dP} \frac{dP}{dT} = \frac{d\mu_2}{dT} + \frac{d\mu_2}{dP} \frac{dP}{dT}$$

и, поскольку $\frac{d\mu}{dT} = -s$, $\frac{d\mu}{dP} = v$, имеем

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2}, \quad (8.10)$$

где v_1 и v_2 – молекулярные объемы.

Воспользовавшись (8.9), получаем формулу Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}. \quad (8.11)$$

Данное уравнение предложено немецким физиком Р. Клаузиусом (1822–1888) и французским инженером и физиком Б. Клапейроном

(1799–1864) в 1851 году. Оно определяет изменение давления находящихся в равновесии фаз при изменении температуры (или изменение температуры перехода под давлением). Если речь идет о равновесии твердого или жидкого тела со своим насыщенным паром, то молекулярным объемом конденсированного состояния v_1 можно пренебречь по сравнению с v_2 . Тогда, считая пар идеальным газом, по (5.29) $v_2 = \frac{T}{P}$ получим

$$\frac{dP}{dT} = \frac{qP}{T^2}. \quad (8.12)$$

При испарении тепло поглощается ($q > 0$), а молекулярный объем увеличивается. Согласно (8.11) и (8.12) с увеличением давления температура кипения повышается. Поэтому, если повысить давление, не изменив температуру, то часть пара сконденсируется, понизив тем самым давление, что находится в соответствии с принципом Ле Шателье.

8.4. Слабые растворы

Слабыми называют растворы, в которых число молекул растворенных веществ значительно меньше числа молекул растворителя. Термодинамический потенциал в случае одного растворенного вещества запишем в виде

$$\Phi = N\mu_0 + n\alpha(P, T, N) + T \ln n!,$$

где μ_0 и N – химпотенциал и число молекул растворителя, $\alpha(P, T, N)$ – функция, определяющая изменение термодинамического потенциала при введении в растворитель одной молекулы растворенного вещества, n – число молекул растворенного вещества.

Вследствие малости n по сравнению с N можно пренебречь их взаимодействием в растворе, поэтому α просто домножается на n . Последнее слагаемое учитывает возможность $n!$ перестановок растворенных молекул. Применяя формулу Стирлинга и вводя вместо α новую функцию $\psi = T \ln N + \alpha$, окончательно получаем

$$\Phi = N\mu_0 + nT \ln \frac{n}{eN} + n\psi(P, T). \quad (8.13)$$

Функция ψ не должна зависеть от N , иначе Φ не будет пропорционально N при фиксированных P , T и $c = \frac{n}{N}$. Из (8.13) найдем химпотенциалы растворителя μ и растворенного вещества μ' .

$$\mu = \frac{d\Phi}{dN} = \mu_0 - Tc, \quad (8.14)$$

$$\mu' = \frac{d\Phi}{dn} = T \ln c + \psi. \quad (8.15)$$

8.5. Осмотическое давление

Предположим, что два раствора одного вещества в одном и том же растворителе обладают различными концентрациями c_1 и c_2 и разделены перегородкой, пропускающей молекулы растворителя, но не растворенного вещества. Давления с обеих сторон перегородки будут при этом различны, а их разность носит название *осмотического давления*. В этом случае по обе стороны от перегородки будут равные значения химпотенциалов растворителя, но различные значения химпотенциалов растворенного вещества, поскольку перегородка мешает установлению этого равновесия. Из (8.14) получаем

$$\mu_0(P_1, T) - c_1 T = \mu_0(P_2, T) - c_2 T.$$

Разлагая $\mu_0(P_2, T)$ с точностью до члена первого порядка по малой для слабых растворов разности давлений между сторонами перегородки, получаем

$$\mu_0(P_2, T) = \mu_0(P_1, T) + \Delta P \frac{d\mu_0}{dP}$$

Учитывая, что $\frac{d\mu_0}{dP}$ (2.22) есть молекулярный объем чистого растворителя v , получаем

$$\Delta P = \frac{(c_2 - c_1)T}{v}. \quad (8.16)$$

8.6. Влияние растворенного вещества на фазовый переход растворителя

Равновесие двух фаз чистого растворителя характеризуется равенством

$$\mu_{01}(P, T) = \mu_{02}(P, T), \quad (8.17)$$

а при растворении в них другого вещества из (8.14) следует

$$\mu_{01}(P, T) - c_1 T = \mu_{02}(P, T) - c_2 T. \quad (8.18)$$

Разлагая (8.18) по изменениям давления ΔP и температуры ΔT и используя равенства $\frac{d\mu}{dT} = -s$ и $\frac{d\mu}{dT} = v$ для растворителя, из (8.9), (8.17) и (8.18) получим

$$\frac{q}{T} \Delta T + (v_1 - v_2) \Delta P = (c_1 - c_2) T. \quad (8.19)$$

Если растворение происходит при постоянном давлении, то $\Delta P = 0$ и равенство $\Delta T = \frac{T^2(c_1 - c_2)}{q}$ определяет изменение температуры фазового перехода при растворении. Например, если сосуществуют твердая и жидкая фазы, причем в твердом состоянии вещество нерастворимо, то растворение понижает температуру замерзания (при замерзании $q < 0$). Аналогично, температура кипения при растворении повышается.

Формулу (8.19) можно использовать также при $\Delta T = 0$. Например, если речь идет о равновесии жидкости с ее паром, то формула $\frac{\Delta P}{P} = -c$, выражающая *закон Рауля*, определяет уменьшение давления насыщенного пара при растворении в жидкости. При выводе пренебрегается молекулярным объемом жидкости по сравнению с паром, а для пара используется уравнение состояния $Pv = T$.

8.7. Равновесие между газом и его раствором

Условие равновесия: равенство химпотенциалов (8.15) вещества в растворе и этого же вещества в идеальном газе

$$T \ln c + \psi(P, T) = T \ln P + f(T). \quad (8.20)$$

Химпотенциал идеального газа получен из (2.24) по формуле $\mu = \frac{dF}{dN}$ с использованием $\frac{V}{N} = \frac{T}{P}$, а вид функции f не важен. Зависимостью ψ от давления P для твердого растворителя можно пренебречь. Тогда из (8.20) следует, что концентрация газа в растворе пропорциональна давлению газа этого вещества

$$c = kP. \quad (8.21)$$

Формула (8.21) выражает *закон Генри*, установленный в 1803 году английским химиком У. Генри (1774–1836), а константа k называется *коэффициент Генри*.

ЛЕКЦИЯ 9. Флуктуации

9.1. Распределение Гаусса

Физические величины, характеризующие макроскопическое тело, почти всегда с большой точностью равны своим средним значениям. Но существуют и малые отклонения от средних значений – флуктуации, которые будут рассмотрены далее.

Пусть x – это физическая величина, характеризующая некоторую замкнутую систему в целом или ее часть. Будем считать, что среднее ее значение \bar{x} уже из нее вычтено, следовательно, $\bar{x} = 0$.

Рассмотрим вероятность $dw(x)$ того, что величина x имеет значение в интервале dx вблизи некоторого значения величины x

$$dw(x) = \rho(x)dx, \quad (9.1)$$

где $\rho(x)$ – плотность вероятности.

Каждому значению x соответствует некоторое значение энтропии системы $S(x)$. Согласно определению энтропии (1.9) $S = \ln \Gamma$ или $\Gamma = e^S$, где Γ – статистический вес данного макроскопического состояния, т. е. число микроскопических состояний, ему соответствующее.

Но чем больше это число, тем больше вероятность обнаружения системы в данном макроскопическом состоянии, поэтому естественно предположить, что плотность вероятности

$$\rho(x) = \text{const} \cdot e^{S(x)}. \quad (9.2)$$

Эту формулу для изучения флуктуаций впервые предложил использовать А. Эйнштейн в 1910 году.

Энтропия имеет максимум в состоянии равновесия, т. е. при $x = 0$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)_{x=0} < 0. \quad (9.3)$$

Отклонения от равновесия при флуктуациях малы, поэтому функцию $S(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и ограничиться членами второго порядка

$$S(x) = S(0) - \frac{\beta}{2}x^2,$$

где β – положительная постоянная.

Подставляя в (8.2), получаем плотность вероятности

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\beta x^2}{2}\right). \quad (9.4)$$

Выражение (9.4) есть *распределение Гаусса* (или *нормальное* распределение). Оно было получено в 1809 году немецким математиком и физиком Карлом Гауссом (1777–1855). Значение постоянного коэффициента получено из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$$

с использованием равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Распределение Гаусса (9.4) имеет максимум при $x = 0$ и быстро спадает с увеличением $|x|$ симметрично в обе стороны (рис. 4.9).

Средний квадрат флуктуации равен

$$\bar{x}^2 = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{\beta x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{\beta}. \quad (9.5)$$

Следовательно, $\beta = \frac{1}{\bar{x}^2}$, и распределение Гаусса принимает вид

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\bar{x}^2}\right). \quad (9.6)$$

Зная \bar{x}^2 , можно найти средний квадрат отклонения для любой функции $\varphi(x)$

$$\Delta\varphi = x \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0},$$

$$(\Delta\bar{\varphi})^2 = \bar{x}^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0}^2. \quad (9.7)$$

Следует отметить, что здесь и далее рассматриваются исключительно не квантовые флуктуации. Последние имеют место и для точно определенного микроскопического состояния.

9.2. Флуктуации основных термодинамических величин

Рассмотрим флуктуации в макроскопической части большой замкнутой системы. Тогда изменение энтропии при флуктуации в экспоненте в (9.3) – это изменение энтропии всей системы ΔS_n за счет отклонения термодинамических величин в ее части при флуктуации. Причем часть системы будем считать настолько маленькой, что изменения в ней не повлияют на давление P и температуру T остальной части. Пусть ΔE , ΔS и ΔV – изменения энергии, энтропии и объема, соответственно,

этой части тела. Поскольку энергия замкнутой системы сохраняется, то изменение энергии остальной ее части равно $-\Delta E$. Из (2.6) получаем

$$-\Delta E = T(\Delta S_n - \Delta S) + P\Delta V.$$

Здесь учтено, что изменение энтропии остальной части равно $\Delta S_n - \Delta S$, а изменение ее объема равно $-\Delta V$. Таким образом, формула (9.3) приобретает вид:

$$\rho = \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{\Delta E - T\Delta S + P\Delta V}{T}\right]. \quad (9.8)$$

Далее, разлагая величину ΔE по отклонениям ΔE , ΔV с использованием (2.6), имеем:

$$\Delta E - T\Delta S + P\Delta V = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} (\Delta S \Delta V) + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} (\Delta V)^2 \right].$$

Правую часть этого равенства можно переписать в следующем виде

$$\frac{1}{2} \left[\Delta S \Delta \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) + \Delta V \Delta \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right) \right],$$

в чем легко убедиться, разлагая величины $\frac{\partial E}{\partial S}$ и $\frac{\partial E}{\partial V}$ по ΔS и ΔV . Используя (2.6), имеем для вычисляемой величины

$$\frac{1}{2} (\Delta S \Delta T - \Delta P \Delta V)$$

и из (9.8)

$$\rho = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\Delta P \Delta V - \Delta S \Delta T}{2T}\right). \quad (9.9)$$

Из этой общей формулы можно найти флуктуации различных термодинамических величин. Выбирая в качестве независимых переменных V и T , имеем

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \Delta V = \left(\frac{C_V}{T} \right) \Delta T + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V. \quad (9.10)$$

Здесь использована формула (2.10) для C_V и из (2.16) нахождением смешанной второй производной от F найдено равенство $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$. Имеем также

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \Delta V. \quad (9.11)$$

Подставляя (9.10) и (9.11) в показатель формулы (9.9), после сокращения членов с $\Delta V \Delta T$ получаем

$$\rho = \text{const} \cdot \exp \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2T} - \frac{C_V (\Delta T)^2}{2T^2} \right]. \quad (9.12)$$

Поскольку плотность вероятности ρ распадается на два множителя, один из которых зависит от ΔV , а другой от ΔT , то флуктуации температуры и объема статистически независимы, откуда следует

$$\overline{\Delta T \Delta V} = \Delta \bar{T} \cdot \Delta \bar{V} = 0. \quad (9.13)$$

Сравнивая каждый из двух множителей, на которые распадается (9.12), с общей формулой распределения Гаусса (9.6), получаем

$$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{T^2}{C_V}, \quad (9.14)$$

$$\overline{(\Delta V)^2} = -T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \quad (9.16)$$

Чтобы увидеть, что величины флуктуаций микроскопически малы, укажем, что, во-первых, в СИ правые части (9.14) и (9.15) должны быть домножены на постоянную Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, а, во-вторых, найдем из (9.14) относительную флуктуацию температуры $\frac{\overline{(\Delta T)^2}}{T^2} = C_V^{-1}$, где C_V по (5.35) порядка числа частиц в теле.

Выберем теперь в качестве независимых переменных в (9.9) P и S . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \Delta S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \Delta S, \\ \Delta T &= \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \Delta P = \left(\frac{T}{C_P}\right) \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \Delta P. \end{aligned}$$

Здесь использована формула (2.10) для C_P , а из (2.12) нахождением смешанной второй производной от W найдено равенство $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$. Подставляя найденные выражения в (9.9), находим

$$\rho = \text{const} \cdot \exp \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \frac{(\Delta P)^2}{2T} - \frac{(\Delta S)^2}{2C_P} \right]. \quad (9.16)$$

Повторяя те же соображения, что и при выводе (9.13) – (9.15), имеем

$$\overline{\Delta S \Delta P} = 0, \quad (9.17)$$

$$\overline{(\Delta S)^2} = C_P, \quad (9.18)$$

$$\overline{(\Delta P)^2} = -T \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S. \quad (9.19)$$

Формула (9.15) определяет флуктуации объема, занимаемого фиксированным числом частиц N . Разделив обе стороны равенства на N^2 , получаем флуктуацию обратной концентрации частиц

$$\left[\overline{\Delta \left(\frac{V}{N} \right)} \right]^2 = -\frac{T}{N^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

Флуктуация обратной концентрации, очевидно, не может зависеть от того, рассматриваем мы ее при заданном N или заданном V . Задавая V , имеем

$$\Delta \left(\frac{V}{N} \right) = V \Delta \left(\frac{1}{N} \right) = -\frac{V}{N^2} \Delta N$$

и

$$\overline{(\Delta N)^2} = -\frac{TN^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (9.20)$$

В случае идеального газа $V = \frac{NT}{P}$, поэтому для идеального газа из (9.20) получаем

$$\overline{(\Delta N)^2} = N. \quad (9.21)$$

Как видно из полученных результатов, средние квадратичные флуктуации экстенсивных величин (тех, которые складываются для тела, состоящего из макроскопических частей) V , S и N прямо пропорциональны объему тела (или, что то же самое, числу частиц в нем), а интенсивных величин (тех, которые одинаковы в равновесии для всех частей тела) T и P – обратно пропорциональны объему. Эти свойства являются прямым следствием общих утверждений теории вероятностей о средних квадратичных отклонениях при независимых измерениях случайной величины. Проще всего вывести указанное свойство экстенсивных величин следующим образом. Мысленно разделим большую систему объема V на n одинаковых подсистем объема v каждый. Тогда среднее квадратичное отклонение экстенсивной величины A для всей системы

$$\overline{(A - A_{cp})^2} = \overline{\left[\sum_a [A_a - (A_{cp})_a] \right]^2} = \sum_a \overline{[A_a - (A_{cp})_a]^2} = \sum_a \overline{[A_a - (A_{cp})_a]} \sum_b \overline{[A_b - (A_{cp})_b]}.$$

Здесь суммирование идет по частям тела, A_{cp} – среднее значение величины A . Квадрат величины представлен как произведение двух одинаковых сомножителей, поменяв во втором сомножителе обозначение индекса суммирования. Поскольку макроскопические части системы статистически независимы, средние от всех слагаемых с $a \neq b$ равно нулю. Поэтому

$$\overline{(A - A_{cp})^2} = \sum_a \overline{[A_a - (A_{cp})_a]^2} = n \overline{[A_a - (A_{cp})_a]^2}_v. \quad (9.22)$$

Мы учли, что средние для одинаковых частей одинаковы, индекс v при среднем означает усреднение по любой из частей объема v . Таким образом, утверждение о пропорциональности общему объему системы доказано. Относительная же флуктуация $\frac{\overline{\Delta A^2}}{A_{cp}^2}$ обратно пропорциональна объему, поскольку $A_{cp} = n(A_{cp})_v$.

Поскольку в случае идеального газа все его частицы независимы, то можно выбрать объем v настолько малым, что маловероятно попадание в него даже одной частицы. Эта вероятность, очевидно, равна произведению v на концентрацию частиц $\frac{N}{V}$, т. е. вероятность $w = \frac{N}{n}$. Величина $\overline{(\Delta N)_v^2}$ равна, очевидно, w . С этой вероятностью одна частица попадает в объем. При этом $\left[N - (N_{cp})_v \right]^2 = 1$, так как малым значением $(N_{cp})_v$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Таким образом, из (9.22) получаем результат (9.21).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие предпосылки привели к формулированию Гамильтоном принципа наименьшего действия?
2. Из каких общих принципов выводятся в теоретической физике законы сохранения?
3. Что позволяет сократить число обобщенных координат для задачи двух тел и для описания движения твердого тела?
4. Какие системы уравнений описывают механическое движение?
5. Предпосылки создания теории относительности.
6. Принципы относительности по Галилею и по Эйнштейну.
7. Инварианты трехмерного и четырехмерного миров.
8. Какому преобразованию четырехмерной системы координат соответствует переход от одной инерциальной системы к другой?
9. На основе каких принципов строится релятивистская механика?
10. Какие частицы движутся со скоростью света, а какие не могут достичь ее?
11. Какой четырехмерный вектор характеризует электромагнитное поле? Его связь с напряженностями электрического и магнитного полей.
12. Как движется заряд в скрещенных (взаимно перпендикулярных) электрическом и магнитном полях?
13. Почему в системе отсчета, связанной с холловским дрейфом в скрещенных полях, заряд движется как в однородном магнитном поле?
14. Из каких соображений следует вид действия для поля?
15. Какой искусственный прием позволяет решить уравнения Максвелла для случая точечного неподвижного заряда (закон Кулона)?
16. Какой искусственный прием позволяет решить уравнения Максвелла для случая стационарных токов (закон Био-Савара)?
17. Какой искусственный прием позволяет решить уравнения Максвелла для случая произвольно движущихся зарядов (запаздывающие потенциалы)?

18. Зачем нужен приближенный метод мультипольного разложения полей при наличии точных выражений для полей? Приведите примеры систем, для которых этот метод употребим.

19. В чем состоит аналогия между геометрической оптикой и механикой?

20. Для излучения какими системами зарядов применимо приближение дипольного излучения?

21. Какие физические явления привели к необходимости создания квантовой механики?

22. Назовите четыре основных принципа, на которых строится квантовая механика.

23. Какая аналогия между механикой и геометрической оптикой приводит к выражению для волновой функции предельного перехода от квантовой механики к классической?

24. Какая математическая теория применяется в математическом аппарате квантовой механики?

25. Как, зная волновую функцию состояния, определить содержание в нем состояний с заданным значением импульса?

26. Чем объяснить то, что состояния свободной частицы с заданным точным значением импульса являются одновременно состояниями с точным значением энергии?

27. Приведите примеры пар дополнительных физических величин.

28. Из каких физических и математических соображений может быть получено уравнение Шредингера?

29. Почему энергия нулевых колебаний отлична от нуля?

30. Существует ли состояние с точным значением вектора момента?

31. Является ли известная формулировка принципа Паули (в одном квантовом состоянии может находиться только один фермион) строгой? В каком приближении она применима?

32. Почему для предложенной Ландау волновой функции электрона в магнитном поле собственным значением является величина p_x , а не p_y ?

33. К какому взаимному расположению спиновых магнитных моментов электронов может приводить обменное взаимодействие?

34. Почему полностью заполненные электронные энергетические зоны проводника никак не проявляют себя во многих физических явлениях?

35. Какая функция максимально полно описывает состояние макроскопической системы в статистической физике?

36. Замкнутую макроскопическую систему вывели из состояния равновесия внешними воздействиями. Какие процессы будут происходить в ней по окончании воздействия?

37. Почему при вычислении средних от физических величин различие между каноническим и макроканоническим распределениями несущественно?

38. Как изменяется энтропия тела с ростом температуры при нагреве при фиксированных объеме или давлении?

39. Задания скольких величин достаточно, чтобы полностью задать термодинамическое состояние определенного количества однородных жидкости или газа в состоянии равновесия?

40. Приведите примеры процессов, подтверждающих применимость к их описанию принципа Ле Шателье.

41. Приведите примеры обратимых и необратимых процессов.

42. Объясните, почему следствия из теоремы Нернста не соответствуют закону равнораспределения.

43. По каким причинам возможны отклонения реальной зависимости давления атмосферы от высоты от барометрической формулы?

44. Какова причина отличия распределений Ферми и Бозе от распределения Максвелла? В каком случае различие несущественно?

45. В каких условиях теплоемкость электронного газа соответствует закону равнораспределения, а в каких – теореме Нернста?

46. То же самое по отношению к теплоемкости кристалла.

47. Изобразите схематически фазовую диаграмму в координатах $T - c$ плавления бинарной смеси двух компонентов A и B при малых

концентрациях c компоненты B в смеси при условии их полной растворимости друг в друге в жидком состоянии и нерастворимости в твердом. То же самое при малой концентрации $(1 - c)$ компоненты A в смеси.

48. Рассматривая смещение частицы вправо или влево на расстояние Δl как равновероятные флуктуации ее положения, а величину среднего полного квадратичного смещения $l(n) = \sqrt{\left(\sum_1^n \Delta l_i\right)^2}$ как среднее от экстенсивной (аддитивной) величины, выведите закон диффузии $l(n) = \Delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 томах. Т.1. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2004. – 224 с.
2. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 томах. Т.2. Теория поля/ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 534 с.
3. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 томах. Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2001. – 808 с.
4. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 томах. Т.5. Статистическая физика. Часть 1 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2005. – 616 с.
5. Ландау Л. Д. Краткий курс теоретической физики: В двух томах. Т. I. Механика. Электродинамика /Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – М.: Наука, 1969. –272 с.
6. Ландау Л. Д. Краткий курс теоретической физики: В двух томах. Т. II. Квантовая механика /Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
7. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел. – М.: Наука, 1967. – 492 с.
8. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: в 9 т. – М.: Мир, 1978.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
I. МЕХАНИКА	4
Лекция 1. Принцип наименьшего действия.....	4
Лекция 2. Законы сохранения. Энергия, импульс, момент импульса	8
Лекция 3. Некоторые примеры интегрирования уравнений движения.....	13
Лекция 4. Гамильтонов формализм	18
II. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	22
Лекция 1. Принцип относительности. Инварианты. Интервал. Преобразования Лоренца.....	22
Лекция 2. Релятивистская механика.....	29
Лекция 3. Заряд в электромагнитном поле	34
Лекция 4. Движение заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях.....	37
Лекция 5. Движение заряженной частицы в постоянном однородном электромагнитном поле	42
Лекция 6. Действия для электромагнитного поля	47
Лекция 7. Вторая пара уравнений Максвелла	52
Лекция 8. Уравнения Максвелла	55
Лекция 9. Постоянное электромагнитное поле. Закон Кулона. Энергия зарядов	60
Лекция 10. Дипольный и мультипольный моменты.....	64
Лекция 11. Постоянное магнитное поле	70
Лекция 12. Электромагнитные волны	72
Лекция 13. Распространение света	78
Лекция 14. Излучение электромагнитных волн	83
III. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА	90
Лекция 1. Необходимость пересмотра представлений классической физики. Основные принципы квантовой механики	90
Лекция 2. Свойства эрмитовых операторов	96

Лекция 3. Операторы основных физических величин	99
Лекция 4. Уравнение Шредингера и простейшие задачи квантовой механики	104
Лекция 5. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Коэффициенты прохождения и отражения. Туннельный эффект	111
Лекция 6. Момент импульса и систематика состояний водородоподобного атома	114
Лекция 7. Теория возмущений	119
Лекция 8. Движение электрона в магнитном поле	123
Лекция 9. Обменное взаимодействие. Магнетизм	126
Лекция 10. Зонная теория электронов в проводниках	130
IV. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	138
Лекция 1. Введение. Фазовое пространство. Статистическое распределение. Энтропия	138
Лекция 2. Термодинамика	142
Лекция 3. Принцип Ле Шателье. Теорема Нернста	148
Лекция 4. Обратимые и необратимые процессы	153
Лекция 5. Связь термодинамики со статфизикой. Статистические распределения в классической физике	155
Лекция 6. Квантовый газ	166
Лекция 7. Конденсированные тела	172
Лекция 8. Фазовые переходы	177
Лекция 9. Флуктуации	185
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	193
ЛИТЕРАТУРА	197

Навчальне видання

КОПЕЛЛОВИЧ Олександр Ілліч
ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна

ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

Текст лекцій
з курсу «Теоретична фізика»
для студентів усіх спеціальностей и усіх форм навчання

Російською мовою

Роботу до видання рекомендувала доц. *К. Т. Лемешевська*

В авторській редакції

План 2015 р., поз. 197

Підп. до друку _____. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. _____.
Наклад ____ прим. Зам № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ „ХПІ”.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
